Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$. Alors u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est symétrique.

Démonstration. Soit b une base orthonormée de E et $A = Mat_b(u) \in M_n(\mathbb{R})$.
<u>Sens direct</u> : On suppose que u est symétrique. Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$A_{ji} = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k, b_j \rangle = \langle u(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, u(b_j) \rangle = \langle b_i, \sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k \rangle = A_{ij}.$$

Donc A est symétrique.
<u>Sens indirect</u> : On suppose que A est symétrique. Soit $x, y \in E$. Alors

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i \right), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle u(b_i), b_j \rangle,$$

avec, pour tout $i, j [\![1, n]\!]$,

$$\langle u(b_i), b_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k, b_j \rangle = A_{ji} = A_{ij} = \langle b_i, u(b_j) \rangle.$$

D'où $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ ce qui montre que u est symétrique. $\square$

Exercice. * Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

Démonstration. D'après le théorème spectral, la matrice D de u dans une base orthonormée est diagonale. Comme $u^p = id_E$, on a $D^p = I_n$. Ainsi les valeurs diagonales de D sont racines de $X^p - 1$, et réelles, donc appartiennent à $\{-1, 1\}$. D'où $D^2 = I_n$ puis $u^2 = id_E$. $\square$

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans F.

1. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers f. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer que $f_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Montrer que le résultat précédent est faux si on suppose seulement la convergence simple des f_n.

Démonstration.

1. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, la fonction f est continue. En particulier en $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall y \in E, \|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, par convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall y \in E, \|f_n(y) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', \|x - x_n\| \leq \delta.$$

Ainsi, en posant $N'' = \max(N, N')$, on obtient

$$\forall n \geq N'', \|f_n(x_n) - f(x)\| \leq \|f_n(x_n) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent $f_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

2. On considère $E = F = \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x \notin [0,1] \\ x^n & \text{si} \quad x \in [0,1] \end{array} \right. \end{array}$$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \delta_0$ mais non uniformément.
On considère de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ mais

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 1 = f(1).$$

□

Exercice. ** Soit M une matrice symétrique d'ordre n dont tous les coefficients sont positifs.

1. Montrer que l'on peut définir

$$\alpha = \sup \{\langle X, MX \rangle, X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$$

et qu'il s'agit une valeur propre de M.

2. Montrer que M admet un vecteur propre à coordonnées toutes positives et associé à une valeur propre positive.

Démonstration.

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ de norme égale à 1. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle MX, X \rangle| \leq \|MX\| \, \|X\| \leq \|M\| \, \|X\|^2 = \|M\|$$

donc le supremum est bien défini.
Il est de plus atteint car l'application $X \mapsto \langle MX, X \rangle$ est continue et le supremum est

fait sur le compact $S(0,1)$ fermé bornée en dimension finie.
Comme pour toute valeur propre λ de M, et tout vecteur propre unitaire X associé à λ, on a

$$\langle MX, X\rangle = \lambda.$$

On en déduit que α est plus grand que les valeurs propres de M. Il est de plus égal à une valeur propre. En effet, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonomée de vecteurs propres de M (existe par théorème spectral) et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres associées commptées avec multiplicité, ordonnées de la façon suivante

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

Alors en considérant $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de norme unitaire, on obtient

$$\langle MX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1,$$

avec égalité si et seulement si X est un vecteur propre de valeur propre λ_1.
Par conséquent $\alpha = \lambda_1$.

2. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $|X|$ le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs absolues des coordonnées du vecteur X. Soit $X \in E_{\lambda_1}(M)$ de norme unitaire, l'inégalité triangulaire nous donne

$$0 \leq |\alpha| = |\langle MX, X\rangle| \leq \langle M|X|, |X|\rangle \leq \alpha$$

car $|X|$ reste de norme 1.
On en déduit

$$\langle M|X|, |X|\rangle = \alpha$$

et donc, par le cas d'égalité de la question précédente, $|X|$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = \alpha \geq 0$.

$\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$ symétrique. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ le résultat est clair. On suppose le résultat vrai dans les espaces de dimension $n-1$. Comme u est symétrique il admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet son polynôme caractéristique admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$, donc, si on note A la matrice de u dans une base de E, il existe $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Ainsi

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \, ^t(\lambda x)\overline{x} = \, ^t(Ax)\overline{x} = \, ^tx^tA\overline{x} = \, ^txA\overline{x} = \, ^tx\overline{\lambda x} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère ensuite e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ et $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$. Alors H est stable par u : pour tout $x \in H$, on a

$$\langle u(x), e_1 \rangle = \langle x, u(e_1) \rangle = \lambda \langle x, e_1 \rangle = 0,$$

et $v := u_{|H} \in L(H)$ est symétrique : pour tout $x, y \in H$, on a

$$\langle v(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

De plus $dim(H) = n-1$, donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, ..., e_n)$ de H diagonalisant v. Par conséquent $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E diagonalisant u. $\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle i.e.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| .$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[& \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} A^k \end{array} .$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^1 et vérifie
$$(I_n - tA) f'(t) = A.$$
3. Dans le cas où $n = 1$, déterminer f.

Démonstration.

1. Soit $t \in \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[$. Alors
$$\left\| \frac{t^k}{k} A^k \right\| \leq \frac{|t|^k \|A\|^k}{k},$$
avec $|t| \, \|A\| < 1$. Donc la série est convergente ce qui montre que f est bien définie.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \longmapsto \frac{t^k}{k} A^k$ est de classe C^1 de dérivée $t \longmapsto t^{k-1}A^k$. De plus, pour tout segment $[a,b] \subset \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[$, on a

$$\left\| t^{k-1}A^k \right\| \leq |t|^{k-1} \|A\|^k \leq \max(a,b)^{k-1} A^k.$$

Donc

$$\left\| t^{k-1}A^k \right\|_{\underset{[a,b]}{\infty}} \leq \max(a,b)^{k-1} A^k,$$

avec $\sum \max(a,b)k-1A^k$ convergente. Donc $\sum t^{k-1}A^k$ est une série de fonctions convergent normalement sur tout segment de $\left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[$. Par conséquent, par théorème dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 et

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[, f'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}A^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k\right) A.$$

Or

$$(I_n - tA)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A_k\right) = I_n.$$

Donc

$$(I_n - tA)f'(t) = A.$$

3. Dans le cas où $n = 1$, on note $A = a \in \mathbb{R}$. Alors

$$f'(t) = \frac{a}{1-ta}.$$

Donc

$$f(t) = -\ln(1-ta).$$

Ainsi, dans le cas général, f est une généralisation du logarithme sur les matrices.

□

Exercice. ** Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Démonstration.

1. Or u est symétrique, donc, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Ainsi, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associés,

$$0 = tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_i)\rangle.$$

Ainsi
$$\sum_{i=1}^{n}\langle\sum_{j=1}^{n}e_j, u(e_i)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\langle e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0,$$
avec $x := \sum_{j=1}^{n} e_j \neq 0$ car la famille est libre.

2. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ le résultat est clair. On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geq 2$. On considère $y = \frac{x}{\|x\|}$, $F = Vect(y)$ et $G = F^{\perp}$. Or $dim(G) = n-1$, donc il existe une base orthonormée $(y_2, ..., y_n)$ de G. Ainsi la matrice symétrique de u dans la base $(y, y_2, ..., y_n)$ s'écrit, comme $u(y) \in F^{\perp} = G$, $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$, avec $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$. On considère v l'endomorphisme sur G dont la matrice dans la base $(y_2, ..., y_n)$ est donnée par B. Alors $tr(v) = tr(u) - 0 = 0$ et v est symétrique. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de G dans laquelle la matrice de v est de coefficients diagonaux nuls. Par conséquent en concaténant y avec cette base, on obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale de coefficients diagonaux nuls.

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème de continuité sous le signe somme d'une série de fonctions vectorielles.

Réponse. Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans F telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de E. Alors $\sum f_n$ est une fonction continue sur E.

Exercice. *** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que l'application exp : $S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.

1. Montrer que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXAX > 0\}.$$

2. Montrer la continuité de exp sur $M_n(\mathbb{R})$. En déduire la continuité de exp sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $exp(A) = exp(A')$.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(exp(A'))$.
   (b) En déduire que A et A' sont co-orthodiagonalisables, i.e. orthodiagonalisable dans la même base orthonormée, puis que $A = A'$.
5. On considère $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (Im(exp))^{\mathbb{N}} = (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B = exp(A) \in Im(exp) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S) \text{ appelé rayon spectral.}$$

   (b) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

   En déduire que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue.

Démonstration.
Etape 1 : $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors, d'après le théorème spectral, S est orthogonalement diagonalisable, donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^tP.$$

Ainsi, par continuité et passage à la limite,

$$exp(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1})^k = Pexp(Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n))^tP = PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^tP.$$

Donc ${}^t exp(S) = exp(S)$, d'où $exp(S) \subset S_n(\mathbb{R})$.
Puis pour $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, comme ${}^t P \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\langle X, exp(S)X \rangle = \langle {}^t PX, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) {}^t PX \rangle = \langle Y, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) Y \rangle$$

en notant $Y = PX \neq 0$.
D'où

$$\langle X, exp(S)X \rangle = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} y_i^2 > 0.$$

Ainsi $exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui montre que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Etape 2 : Continuité
La fonction exp est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. En effet la série fonctionnelle $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$ et les fonctions $A \longmapsto \frac{1}{k!} A^k$ sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$. Donc, par restriction, $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est également continue.
Etape 2 : Surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors, par théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que

$$B = PDiag(\mu_1, ..., \mu_n) {}^t P.$$

Or $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijectif, donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, e^{\lambda_i} = \mu_i$.
On considère donc

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P$$

pour avoir $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $exp(S) = B$ ce qui montre la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Etape 3 : Injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $(A, A') \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $exp(A) = exp(A')$. Ainsi, comme précédemment,

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P.$$

De plus, en considérant $(\lambda'_1, ..., \lambda'_m)$ les λ_i distincts, les $(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_m})$ sont distincts par injectivité de l'exponentielle réelle, donc il existe un polynôme interpolateur de Lagrange $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!], Q(e^{\lambda'_i}) = \lambda'_i$.
Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i.$$

Alors

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P = PDiag(Q(e^{\lambda_1}), ..., Q(e^{\lambda_n})) {}^t P = Q(exp(A)) = Q(exp(A')).$$

D'où $AA' = A'A$ ie A et A' commutent.
Or, par théorème spectral, A et A' sont orthodiagonalisables, donc A et A' sont orthodiagonalisables dans une même base orthonormée, i.e. il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P, A' = PDiag(\lambda'_1, ..., \lambda'_n) {}^t P.$$

D'où

$$PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) {}^t P = exp(A) = exp(A') = PDiag(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_n}) {}^t P$$

Ainsi
$$\forall i \in [\![1,n]\!], e^{\lambda_i} = e^{\lambda_i'}.$$
Puis, par injectivité de l'exponentielle réelle, $A = A'$ ce qui montre l'injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Etape 4 : Continuité de $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$

Utilisons la caractérisation séquentielle de continuité : Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ et $B = exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que
$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B.$$

Sous-étape a : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée

Comme la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$.
De même, par continuité du passage à l'inverse, la suite $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B^{-1}, donc elle est également bornée pour $\|\cdot\|_2$.
Or pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a
$$\|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S).$$
Ainsi, il existe $(C, C') \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall p \in \mathbb{N}, max(Sp(B_p)) \subset]0, C], max(Sp(B_p^{-1})) \subset]0, C'].$$
Or $max(Sp(B_p^{-1})) = min(Sp(B_p))^{-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc
$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(B_p) \subset [C'^{-1}, C] \subset]0, +\infty[$$
Puis
$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(A_p) = ln(Sp(B_p)) \subset [ln(C'^{-1}), ln(C))] \subset \mathbb{R}$$
Donc la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Sous-étape b : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'admet qu'une valeur d'adhérence

Soit $A' \in S_n(\mathbb{R})$ et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que
$$A_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A'$$
Donc, par continuité de exp :
$$B_{\varphi(p)} = exp(A_{\varphi(p)}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} exp(A')$$
D'où, par unicité de la limité, $exp(A) = exp(A')$, puis, par injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = A'$.

Sous-étape c : Conclusion

Ainsi, comme $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$ ce qui montre que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue. $\square$