Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Le démontrer.

Réponse. Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont exactement les $\overline{k}$ avec k entier premier avec n.

Démonstration. Soit $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
En particulier il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{1} = u\overline{k} = \overline{uk}$.
Donc $n \mid 1 - uk$, ie il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $1 - uk = vn$, ie $1 = uk + vn$.
Ainsi, d'après le théorème de Bézout, k et n sont premiers entre eux.
Réciproquement soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que k soit premier avec n.
Alors, d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tel que $1 = un + kv$. Donc, pour $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a

$$\overline{m} = 1 \times \overline{m} = un\overline{m} + kv\overline{m} = \overline{0} + \overline{k}\overline{um}$$

Donc $\overline{k}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Exercice. Soit G un groupe abélien fini (dont la loi est notée multiplicativement).

1. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b premiers entre eux, montrer que xy est d'ordre ab.
2. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b, montrer que xy est d'ordre $\text{ppcm}(a, b)$.
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que l'ordre de z soit le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G (appelé exposant du groupe G).
4. En déduire que pour K un corps et G un sous-groupe fini de $K^\times$, G est cyclique.

Démonstration.

1. On a par caractère abélien $(xy)^{ab} = x^a y^b = 1$, donc

$$o(xy) \mid ab$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $(xy)^n = 1$, on a $y^{an} = (xy)^{an} = 1$ et $x^{bn} = (xy)^{bn} = 1$.
Donc $b \mid an$ et $a \mid bn$, d'où, comme a et b sont premiers entre eux, $b \mid n$ et $a \mid n$ puis $ab \mid n$.
En particulier pour $n = o(ab)$,

$$ab \mid o(xy)$$

Par conséquent $ab = o(xy)$.

2. On considère

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}, \nu_p(a) > \nu_p(b)} p^{\nu_p(a)}, l = \prod_{p \in \mathcal{P}, \nu_p(a) \leq \nu_p(b)} p^{\nu_p(b)}$$

Alors $kl = ppcm(a, b)$ et k, l sont premiers entre eux.
Donc $x' := x^{\frac{a}{k}}$ et $y' := y^{\frac{b}{l}}$ sont d'ordres respectifs k et l, d'où, d'après ce qui précède, $z := x'y'$ est d'ordre $kl = ppcm(a, b)$.

3. L'ensemble des ordres des éléments de G est fini d'après le théorème de Lagrange et non vide, donc admet un élément maximal : il existe $z \in G$ tel que

$$\forall g \in G, o(g) \leq o(z) =: a$$

Soit $x \in G$ d'ordre b.
Considérons k et l définies à la question précédente.

Alors $z^{\frac{a}{k}}$ est d'ordre k et $x^{\frac{b}{l}}$ d'ordre l.
Donc, d'après la question 1, $z^{\frac{a}{k}}x^{\frac{b}{l}}$ est d'ordre $kl = ppcm(a,b)$.
Or, d'après la condition sur a, on a $ppcm(a,b) \leq a$ ie $ppcm(a,b) = a$ puis $b \mid a$.
Par conséquent, ceci étant vrai pour tout élément $x \in G$, a est multiple commun de tous les ordres des éléments de G.
De plus a est le plus petit parmi ces éléments-ci car pour a' multiple commun de tous les ordres des éléments de G, on a en particulier $a = o(g) \leq a'$.
Donc z est d'ordre a le plus petit multiple commun des ordres des éléments de G.

4. Soit K un corps et G un sous-groupe fini de $K^\times$.
On note n le cardinal de G et a son exposant.
Comme pour tout $x \in G$, $x^a = 1$, on a
$$G \subset \{x \in K, x^a - 1 = 0\}$$
Or l'ensemble des racines de $X^a - 1$ est fini et de carinal au plus a, donc $n \leq a$.
De plus, d'après la question précédente, il existe $z \in G$ d'ordre a, donc, d'après le théorème de Lagrange, $a \leq n$.
Par conséquent $a = n$ et z est un générateur de G ce qui montre que G est cyclique.

□

Exercice. On considère $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Démonstration.

1. On considère le morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Q}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $\varphi(P) = P(\sqrt{2})$ pour $P \in \mathbb{Q}(X)$.
Ainsi $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \varphi(\mathbb{Q}(X))$ avec $\mathbb{Q}(X)$ un corps et φ un morphisme de corps entre les corps $\mathbb{Q}(X)$ et $\mathbb{R}$.
Donc $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.
Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1) = n$, puis $f(-n) + f(n) = f(0) = 0$, ainsi on a également $f(-n) = -f(n) = -n$.
Et pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = p$, donc $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$. Enfin, comme $f(\sqrt{2})^2 = f(2) = 2$, on a $f(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
Par conséquent
$$\forall a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), f(a + b\sqrt{2}) = a + \varepsilon b\sqrt{2}$$
avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
Réciproquement ces deux applications définissent bien des automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

□

Exercice. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le PGCD entre $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Démonstration. D'après la division euclidienne sur $\mathbb{N}$, il existe $q, r \in \mathbb{N}$ (uniques) tels que

$$n = qm + r, r < m.$$

Ainsi

$$X^n - 1 = X^{qm+r} - 1 = X^r(X^{qm} - 1) + X^r - 1,$$

avec

$$X^{qm} - 1 = (X^m - 1)\sum_{k=0}^{q-1} X^{mk}$$

et

$$\deg(X^r - 1) = r < m = \deg(X^m - 1).$$

Donc le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est $X^r - 1$. Ainsi

$$PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = PGCD(X^m - 1, X^r - 1).$$

Puis, en effectuant l'algortihme d'Euclide entre n et n, on obtient

$$PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = ... = PGCD(X^{r_i} - 1, X^{r_{i+1}} - 1)$$
$$= ... = PGCD(X^{PGCD(n,m)} - 1, X^0 - 1) = X^{PGCD(n,m)} - 1.$$

□

Exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que toutes ses racines réelles sont de multiplicité paire. En déduire qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Démonstration. On a $0 \leq P(x) \underset{x\to\infty}{\sim} cd(P)x^{deg(P)}$. Donc $cd(P) \geq 0$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ racine de P de multiplicité m. Alors

$$P(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(X - a)^m.$$

Ainsi si m est impair alors il y a changement de signe au voisinage de a ce qui n'est pas, donc m est paire.
Par conséquent on peut écrire

$$P = \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{2m_k}\prod_{j=1}^{s}(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{\gamma_k},$$

avec $X^2 + \alpha_k X + \beta_k \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle. Donc

$$X^2 + \alpha_k X + \beta_k = (X - b_k)(X - \overline{b_k}).$$

Ainsi

$$P = \left(\prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{s}(X - b_k)^{\gamma_k}\right)\overline{\left(\prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{s}(X - b_k)^{\gamma_k}\right)} =: C\overline{C},$$

avec $C \in \mathbb{C}[X]$. On considère $A = Re(C) \in \mathbb{R}[X]$ et $B = Im(C) \in \mathbb{R}[X]$, pour avoir

$$P = A^2 + B^2.$$

□

Question de cours. Déterminer la dérivée de $B \circ (f, g)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow E, g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ dérivables et $B : E \times F \longrightarrow G$ application bilinéaire avec E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie. Le démontrer.

Réponse. Si f et g sont dérivable alors $B \circ (f, g)$ est dérivables et

$$(B \circ (f, g))' = B \circ (f', g) + B \circ (f, g').$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{B(f(t), g(t)) - B(f(s), g(s))}{t - s} = \frac{B(f(t), g(t)) - B(f(s), g(t)) + B(f(s), g(t)) - B(f(s), g(s))}{t - s}$$

$$= B\left(\frac{f(t) - f(s)}{t - s}, g(t)\right) + B\left(f(s), \frac{g(t) - g(s)}{t - s}\right) \underset{s \to t}{\longrightarrow} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)),$$

grâce à la continuité de B (bilinéaire en dimension finie) et de f. □

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans F.

1. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers f. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer que $f_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Montrer que le résultat précédent est faux si on suppose seulement la convergence simple des f_n.

Démonstration.

1. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, la fonction f est continue. En particulier en $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

   $$\forall y \in E, \|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

   De plus, par convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N, \forall y \in E, \|f_n(y) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Or $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N', \|x - x_n\| \leq \delta.$$

   Ainsi, en posant $N'' = \max(N, N')$, on obtient

   $$\forall n \geq N'', \|f_n(x_n) - f(x)\| \leq \|f_n(x_n) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

   Par conséquent $f_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

2. On considère $E = F = \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x \notin [0,1] \\ x^n & \text{si} & x \in [0,1] \end{array} \right. \end{array}$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \delta_0$ mais non uniformément.
On considère de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 1 = f(1).$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'équation homogène associé est $y' + y = 0$ de solution $y_0(t) = \lambda e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $y_c(t) := c(t)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$. Alors y_c est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, c'(t)e^{-t} = c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t},$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, c'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} =$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \ln(1+e^t)e^{-t}.$$

Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^{-t} + \ln(1+e^t)e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = te^t$.

Démonstration. L'équation homogène associé est $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0$ d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 4 = 0$ de solutions $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Donc les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t)\right) e^{-t}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_c(t) = (at+b)e^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi, par dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + b + 2a + 2(at + b + a) + 4(at + b) = t.$$

Donc

$$\begin{cases} 7a & = & 1 \\ 7b + 4a & = & 0. \end{cases}$$

D'où $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{4}{49}$. Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t)\right) e^{-t} + \left(\frac{1}{7}t - \frac{4}{49}\right) e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Question de cours. Déterminer la dérivée de $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tA)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le démontrer.

Réponse. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $f(t) = \exp(tA)$. Alors

$$f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Démonstration. On a

$$f(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est dérivable de dérivée $f_0'(t) = 0$ et $f_k'(t) = \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit C compact de $\mathbb{R}$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $C \subset [-a, a]$. Ainsi, pour tout $t \in C$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_k'(t)\| \leq \frac{|t|^{k-1} \|A\|^k}{(k-1)!} \leq \frac{c^{k-1} \|A\|^k}{(k-1)!}.$$

Donc

$$\|f_k'\|_{\underset{C}{\infty}} \leq \frac{c^{k-1} \|A\|^k}{(k-1)!},$$

avec $\sum \frac{c^{k-1}\|A\|^k}{(k-1)!}$ convergente. Ainsi $\sum f_k'$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
Par conséquent, par théorème de dérivation sous le signe somme, f est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$ tels que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

On considère $u := \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| dt} \int_a^b f(t)dt \in E$ et, pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

la décomposition de $f(t)$ dans la décomposition $E = Vect(u) \overset{\perp}{\bigoplus} (Vect(u))^\perp$.
Montrer que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \|f(t)\| \, u$.

Démonstration. Par théorème de Pythagore, on a

$$\forall t \in [a, b], \|f(t)\|^2 = \alpha(t)^2 \|u\|^2 + \|v(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|v(t)\|^2 \geq \alpha(t)^2$$

D'où $\|f\| \geq \alpha$.
De plus, on a $\int_a^b v(t)dt \in Vect(u)^\perp$ car, par linéarité de l'intégration et $v(t) \in Vect(u)^\perp$,

$$\langle u, \int_a^b v(t)dt\rangle = \int_a^b \langle u, v(t)\rangle dt = 0$$

Ainsi, de l'égalité

$$\underbrace{\int_a^b \|f(t)\| \, dtu}_{\in Vect(u)} = \int_a^b f(t)dt = \underbrace{\int_a^b \alpha(t)dtu}_{\in Vect(u)} + \int_a^b v(t)dt$$

On en déduit, par somme directe,

$$\int_a^b \|f(t)\| \, dt = \int_a^b \alpha(t)dt, \int_a^b v(t)dt = 0.$$

Ainsi $\|f\| - \alpha$ est une fonction positive d'intégrale nulle. Par conséquent $\alpha = \|f\|$ puis $v = 0$ d'après l'égalité du théorème de Pythagore par exemple, ce qui donne finalement

$$\forall t \in [a, b], f(t) = \|f(t)\| \, u$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $(1+t)y'(t)+y(t) = 1+\ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$.

Démonstration. L'équation homogène associée est $(1+t)y'(t)+y(t) = 0$ i.e. $y'(t) = -\frac{1}{1+t}y(t)$ de solution $y_0(t) = \lambda e^{-\ln(1+t)} = \frac{\lambda}{1+t}$ sur $]-1, +\infty[$. On considère $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $y_c(t) = \frac{c(t)}{1+t}$ sur $]-1, +\infty[$. Alors y_c est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in \,]-1, +\infty[, (1+t)\left(c'(t)\frac{1}{1+t} - c(t)\frac{1}{(1+t)^2}\right) + \frac{c(t)}{1+t} = 1 + \ln(t+t),$$

i.e.

$$\forall t \in \,]-1, +\infty[, c'(t) = 1 + \ln(1+t).$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \frac{1}{1+t}\int_0^t (1 + \ln(1+s)) \, ds = \frac{1}{1+t}\left(t + [(s+1)\ln(1+s) - s]_0^t\right) = \ln(1+t)$$

. Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \frac{\lambda}{1+t} + \ln(1+t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^t$.

Démonstration. L'équation homogène associée est $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)$ d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3$ de solutions 1 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_c(t) = (at^2 + bt + c)e^t$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ainsi, par dérivation,

$$\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c - 4(at^2 + (2a + b)t + b + c) + 3(at^2 + bt + c) = 2t + 1.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4a + b - 4(2a + b) + 3b & = & 2 \\ 2a + 2b + c - 4(b + c) + 3c & = & 1 \end{array} \right.$$

i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4a & = & 2 \\ 2a - 2b & = & 1. \end{array} \right.$$

D'où $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ et on peut prendre $c = 0$. Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) e^t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire intégrale pour une fonction à valeurs vectorielles définies sur un segment de $\mathbb{R}$.

Réponse. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a, b] \longrightarrow E$ continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$S_n := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$\|S_n\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\|.$$

Puis, par passage à la limite et continuité,

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

$\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle i.e.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| .$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[& \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} A^k \end{array}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^1 et vérifie

$$(I_n - tA)f'(t) = A.$$

3. Dans le cas où $n = 1$, déterminer f.

Démonstration.

1. Soit $t \in \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[$. Alors

$$\left\| \frac{t^k}{k} A^k \right\| \leq \frac{|t|^k \, \|A\|^k}{k},$$

avec $|t| \, \|A\| < 1$. Donc la série est convergente ce qui montre que f est bien définie.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \longmapsto \frac{t^k}{k} A^k$ est de classe C^1 de dérivée $t \longmapsto t^{k-1}A^k$. De plus, pour tout segment $[a, b] \subset \left] -\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|} \right[$, on a
$$\left\| t^{k-1}A^k \right\| \leq |t|^{k-1} \|A\|^k \leq \max(a, b)^{k-1} A^k.$$
Donc
$$\left\| t^{k-1}A^k \right\|_{[a,b]}^{\infty} \leq \max(a, b)^{k-1} A^k,$$
avec $\sum \max(a, b)k - 1A^k$ convergente. Donc $\sum t^{k-1}A^k$ est une série de fonctions convergent normalement sur tout segment de $\left] -\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|} \right[$. Par conséquent, par théorème dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 et
$$\forall t \in \left] -\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|} \right[, f'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1} A^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k \right) A.$$
Or
$$(I_n - tA) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A_k \right) = I_n.$$
Donc
$$(I_n - tA) f'(t) = A.$$
3. Dans le cas où $n = 1$, on note $A = a \in \mathbb{R}$. Alors
$$f'(t) = \frac{a}{1 - ta}.$$
Donc
$$f(t) = -\ln(1 - ta).$$
Ainsi, dans le cas général, f est une généralisation du logarithme sur les matrices.

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. L'équation homogène associé est $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = 0$ i.e. $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ de solution $y_0(t) = \lambda e^{\ln(t)} = \lambda t$ sur $]0, +\infty[$. On considère $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $y_c(t) = c(t)t$ sur $]0, +\infty[$. Alors y_c est solution de l'équation différentielle si et seulement si
$$\forall t \in]0, +\infty[, c'(t)t + c(t) - \frac{c(t)t}{t} = t^2,$$
i.e.
$$\forall t \in]0, +\infty[, c'(t) = t.$$
Ainsi une solution particulière est donnée par
$$y_c(t) = \frac{t^3}{2}.$$

Puis les solutions de l'équations sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda t + \frac{t^3}{t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^{-t}$.

Démonstration. L'équation homogène associée est $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)$ d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3$ de solutions 1 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_c(t) = (at+b)e^{-t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi, par dérivation,

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + (b-2a) - 4(-at - b + a) + 3(at+b) = 2t + 1.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8a & = & 2 \\ 8b - 6a & = & 1 \end{array} \right.$$

D'où $a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{16}$.
Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-t}, a, b \in \mathbb{R}.$$

$\square$