

Question de cours. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel.

Réponse. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in D(0, r)$.

Démonstration. Soit $z \in D(0, r)$. Alors

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \left| \frac{z}{r} \right|^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\left| \frac{z}{r} \right|^n\right).$$

Or $\sum \left| \frac{z}{r} \right|^n$ est une série convergente car $|z| < r$, donc, par théorème de comparaison, $\sum |a_n z^n|$ est convergente. \square

Exercice. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, a_0 = \alpha \in \mathbb{R}, a_1 = \beta \in \mathbb{R}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Démonstration. L'équation caractéristique associée à la suite a récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

de solution double $r = 1$, ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda + \mu n$$

Or $\alpha = a_0 = \lambda$ et $\beta = a_1 = \lambda + \mu$, d'où $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta - \lambda = \beta - \alpha$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha + (\beta - \alpha)n$$

Si $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq 0$ alors $R_a = 1$.

Si $\alpha = \beta = 0$ alors $R_a = +\infty$.

Si $\alpha \neq \beta$ alors $R_a = 1$. \square

Exercice. Soit f la fonction somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.

On suppose que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$$

1. On suppose de plus $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, montrer que $\sum a_n$ converge de somme égale à l .
2. Sans cet hypothèse montrer que ce résultat est faux en général.

Démonstration.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, alors

$$\sum_{n=0}^N a_n - l = (f(x) - l) + \left(\sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^N a_n x^n \right) - \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \right) =: A_N + B_N - C_N$$

Or $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

Donc si $N \geq n_0$,

$$|C_N| \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

On définit alors $x_N = 1 - \frac{1}{N}$ pour avoir

$$|C_N| \leq \varepsilon$$

D'autre part

$$|B_N| = \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - x_N^n) \right| \leq \sum_{n=0}^N |a_n| (1 - x_N^n) \leq (1 - x_N) \sum_{n=0}^N n |a_n| = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n |a_n|$$

Or $na_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par moyenne de Cesàro, $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n |a_n| \underset{N \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi, il existe $n_1 \geq n_0$, tel que si $N \geq n_1$ alors

$$|B_N| \leq \varepsilon$$

Enfin $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ et $x_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc il existe $n_2 \geq n_1$ tel que si $N \geq n_2$ alors

$$|A_N| = |f(x_N) - l| \leq \varepsilon$$

D'où finalement

$$\sum_{n=0}^N a_n \underset{N \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} l$$

2. On considère $a_n = (-1)^n$, donc $f(x) = \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ mais la série $\sum a_n = \sum (-1)^n$ diverge grossièrement.

□

Exercice. On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$\forall x \in] -1, +\infty[, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et en déduire le développement en série entière en 0.

Démonstration. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale (avec domination sur tout compact) pour obtenir que pour tout $x \in] -1, +\infty[$,

$$f'(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

Puis par intégration par partie en primitivant $\frac{1}{(x+t)^2}$, on obtient

$$f'(x) = \left[\frac{e^{-t}}{x+t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = -\frac{1}{e(x+1)} + f(x)$$

D'où f vérifie l'équation différentielle

$$f'(x) - f(x) + \frac{1}{e(x+1)} = 0$$

On suppose que f est développable en série entière noté $\sum a_n x^n$.

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ de somme $\sum (-1)^n x^n$.

On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-1} x^n = 0,$$

i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-1} x^n = 0.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} - a_n + (-1)^n e^{-1} = 0.$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{(-1)^n e^{-1}}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)n} - \frac{(-1)^{n-1} e^{-1}}{(n+1)n} - \frac{(-1)^n e^{-1}}{n+1}.$$

Ainsi par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{n!} - e^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k} k!}{n!}.$$

Réciproquement une série entière $\sum a_n x^n$, avec les a_n définies par la relation précédente, vérifie l'équation différentielle et est bien définie sur $] -1, 1[$.

De plus il s'agit de l'unique solution par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. \square

Question de cours. Énoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

Réponse. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière tel que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in [0, +\infty]$, alors $R_a = \frac{1}{l}$.

Démonstration. On suppose que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in [0, +\infty].$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|l.$$

Donc :

- Si $|z| < \frac{1}{l}$ alors, d'après la règle de d'Alembert sur les séries numériques, $\sum a_n z^n$ converge absolument. Donc $R_a \geq \frac{1}{l}$.
- Si $|z| > \frac{1}{l}$ alors, d'après la règle de d'Alembert sur les séries numériques, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Donc $R_a \leq \frac{1}{l}$.

Par conséquent $R_a = \frac{1}{l}$. □

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente.

Or par croissance comparée, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_n r^n)$$

Donc par comparaison $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est absolument convergente, d'où le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est $+\infty$. □

Exercice. On considère f définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle, en déduire le développement en série entière de f et donner le rayon de convergence.

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$, comme quotient et composé de telles fonctions, et pour $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\arcsin'(x)\sqrt{1-x^2} - \arcsin(x)(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + xf(x)}{1+x^2}$$

ie f est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0, f(0) = 0$$

De plus la fonction f est développable en série entière comme quotient de telles fonctions. Or la fonction f est impaire, donc $a_n = 0$ pour n pair, ainsi on peut noter son développement en série entière $\sum a_n x^{2n+1}$.

Puis le développement en série entière de f' est $\sum (2n+1)a_n x^{2n}$, ainsi, en reportant ces deux séries entières dans l'équation différentielle, on obtient par unicité des coefficients d'une série entière la relation suivante

$$a_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puis, après calculs,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi, par critère de d'Alembert, le rayon de convergence est 1. \square

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme $f(z)$.

1. Soit $r \in]0, R[$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

2. En déduire que si f admet un maximum local en 0, alors f est une fonction constante.

Démonstration.

1. Soit $r \in]0, R[$, alors la série $\sum a_n r^n$ converge absolument.

Or pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$|f(re^{it})|^2 = f(re^{it}) \overline{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \sum_{m=0}^{+\infty} \overline{a_m} r^m e^{-imt}$$

produit de Cauchy de séries absolument convergentes, donc

$$|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(k-(n-k))t} \right) r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} \right) r^n$$

De plus la série de fonctions continues $t \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} r^n$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, on peut donc utiliser le théorème d'interversion somme et intégrale pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} r^n dt = 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)t} dt = 0$ si $2k \neq n$.

2. On a d'après la question précédente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(re^{it})|^2 - |f(0)|^2) dt \leq 0$$

pour r assez petit car f admet un maximum local en 0. D'où $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que f est constante.

□

Question de cours. Une fonction de classe C^∞ est-elle développable en série entière ? Si oui donner son développement en série entière au voisinage de 0. Si non connaissez-vous un contre-exemple. La réciproque est-elle vraie ? Si oui le démontrer. Si non connaissez-vous un contre-exemple.

Réponse. Une fonction f développable en série entière $\sum a_n x^n$ est de classe C^∞ au voisinage de 0 et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Cependant la réciproque est fautive, par exemple

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x)$$

définie une fonction de classe C^∞ non identiquement nulle sur \mathbb{R} mais $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

Démonstration. Soit f une fonction développable en série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, z \mapsto a_n z^n$ est continu sur $D(0, R)$. De plus, sur tout compact K de $D(0, R)$, $K \subset \overline{D}(0, r)$ avec $r \in]0, R[$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in K, |a_n z^n| \leq |a_n| r^n.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n z^n\|_{\infty, K} \leq |a_n| r^n,$$

avec $\sum |a_n| r^n$ série convergente. Ainsi $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K . Par conséquent, par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $D(0, R)$.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, z \mapsto a_n z^n$ est de classe C^k sur $D(0, R)$ et, en fixant $r' \in]r, R[$,

$$\forall n \geq k, \|(a_n z^n)^{(k)}\|_{\infty, K} \leq |a_n| n(n-1)\dots(n-1-k) r^n = |a_n| r'^n n(n-1)\dots(n-1-k) \left(\frac{r}{r'}\right)^n.$$

Ainsi $\sum (a_n z^n)^{(k)}$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$. Par conséquent, par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^k sur $D(0, R)$, donc de classe C^∞ . \square

Exercice. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}}{\pi^{\sqrt{n^2+2n}}} = \pi^{\sqrt{(n+1)^2+2n+2}-\sqrt{n^2+2n}}$$

Or

$$\begin{aligned} \sqrt{(n+1)^2+2n+2}-\sqrt{n^2+2n} &= \frac{(n+1)^2+2n+2-n^2-2n}{\sqrt{(n+1)^2+2n+2}+\sqrt{n^2+2n}} \\ &= \frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)^2+2n+2}+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{2}{n+1}}+\sqrt{\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$$

Ainsi, par critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n y^n$ est $\frac{1}{\pi}$, puis celui de la série entière $\sum u_n x^{2n}$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. \square

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, calculer la partie imaginaire de $\frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x\sin(\theta)e^{i\theta}}$, en déduire le développement en série entière de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan\left(x - \frac{1}{\tan(\theta)}\right)$$

Démonstration. On a bien $x\sin(\theta)e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et

$$\frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x\sin(\theta)e^{i\theta}} = \frac{\sin(\theta)e^{i\theta}(1-x\sin(\theta)e^{-i\theta})}{|1-x\sin(\theta)e^{i\theta}|^2} = \frac{\sin(\theta)e^{i\theta} - x\sin(\theta)^2}{1-2x\sin(\theta)\cos(\theta) + x^2\sin(\theta)^2}$$

D'où

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x\sin(\theta)e^{i\theta}}\right) = \frac{\sin(\theta)^2}{1-2x\sin(\theta)\cos(\theta) + x^2\sin(\theta)^2}$$

Or la fonction f est dérivable comme composée de telles fonctions et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-\left(x - \frac{1}{\tan(\theta)}\right)^2} = \frac{\tan(\theta)^2}{\tan(\theta)^2 - \tan(\theta)^2x^2 + 2\tan(\theta)x + 1} \\ &= \frac{\sin(\theta)^2}{\sin(\theta)^2 - \sin(\theta)^2x^2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta)x + \cos(\theta)^2} = \frac{\sin(\theta)^2}{1 - \sin(\theta)^2x^2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta)x} \end{aligned}$$

D'où

$$f'(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x\sin(\theta)e^{i\theta}}\right)$$

Or, si $|x\sin(\theta)| < 1$, on a le développement en série suivant

$$\frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x\sin(\theta)e^{i\theta}} = \sin(\theta)e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (x\sin(\theta)e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta)^{n+1} e^{i\theta(n+1)} x^n$$

Ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta)^{n+1} \sin(\theta(n+1)) x^n$$

D'où

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\theta)^n \sin(\theta n)}{n} x^n = \theta - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\theta)^n \sin(\theta n)}{n} x^n.$$

□

Exercice. On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(tx) dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x)$$

2. Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de

$$xy' + (k + 1)y = \sin(x)$$

en précisant le rayon de convergence.

Démonstration.

1. On vérifie le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour obtenir

$$f'(x) = \int_0^1 t^{k+1} \cos(tx) dt$$

Puis par intégration par parties, si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left[t^k \frac{\sin(tx)}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)t^k \frac{\sin(tx)}{x} dt = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{k+1}{x} f(x)$$

D'où

$$xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x)$$

ce qui est également vérifié en $x = 0$.

2. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ série entière solution de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (k+1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (k+1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

D'où, par unicité du développement en série entière, $a_n = 0$ si n pair et sinon

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(k+1+2n+1)(2n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+k+2)(2n+1)!}$$

Ainsi $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Synthèse : Réciproquement $\sum a_n z^n$ vérifie bien l'équation différentielle souhaitée.

□