Question de cours. Quelles inégalités existent-ils entre les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$? et entre les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $C([a,b],\mathbb{R})$? Le démontrer.

Exercice.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u, noté $Val(u)$, est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [a,b]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice.

1. Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.
2. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
   On pourra commencer par le cas $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1 = \sum_{i=1}^n b_i^q$
3. En déduire que $\|\cdot\|_p : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de Bolzanno-Weierstrass en dimension finie. On pourra commencer par énoncer clairement les étapes de la démonstration.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])^{\mathbb{N}}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\forall x \in [a,b], f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Montrer que si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors f est continue sur $[a,b]$.
3. Montrer que la convergence simple ne suffit pas. Trouver un contre-exemple.

Question de cours. Comment caractériser l'équivalence des normes par les suites convergentes ? Le démontrer.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, montrer que $|||\cdot||| : A \in M_n(\mathbb{K}) \longmapsto \underset{x\in S(0,1)}{sup} \|Ax\|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$, appelé norme matricielle induite par $\|\cdot\|$.
2. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_\infty$ vérifie

$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

3. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_1$ vérifie

$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$