Question de cours. Quelles inégalités existent-ils entre les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$? et entre les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $C([a,b],\mathbb{R})$? Le démontrer.

Réponse. Sur $\mathbb{K}^n$ on a

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}^n$.

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \|x\|_\infty$.
2. Il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_j| = \|x\|_\infty$, ainsi $\|x\|_\infty = |x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2$.
3. $\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2$.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \|f\|_\infty$.
2. Il n'existe pas de $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leq C \|\cdot\|_1$: avec $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$ on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
3. Il n'existe pas de $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|\cdot\|_2 \leq C \|\cdot\|_1$: $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
4. Il n'existe pas de $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leq C \|\cdot\|_2$: $\left\|\sqrt{f_n}\right\|_\infty = 1, \left\|\sqrt{f_n}\right\|_2 = \frac{1}{n+1}$.
5. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \times 1 dx \leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \sqrt{b-a} \|f\|_2$.
6. $\|f\|_2^2 = \int_a^b f(x)^2 dx \leq (b-a) \|f\|_\infty^2$.

$\square$

Exercice.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u, noté $Val(u)$, est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [a,b]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

1. Soit $a, b \in Val(u)$ et $c \in]a, b[$.
   Or $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq n_0, |u_n - u_{n+1}| \leq \varepsilon$$

   Or $a \in Val(u)$, donc il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $u_{n_1} \in]-\infty, c[$.
   De même $b \in Val(u)$ donc il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \in]c, +\infty[$.
   On peut donc considérer

   $$p = min(n > n_1, u_n \notin]-\infty, c-\varepsilon])$$

En particulier $u_p \notin \,]-\infty, c-\varepsilon]$, ie $u_p > c-\varepsilon$.
Or $p > n_1 \geq n_0$, donc $|u_{p-1} - u_p| \leq \varepsilon$.
De plus $u_{p-1} \in \,]-\infty, c-\varepsilon]$ par définition de p, ie $u_{p-1} \leq c-\varepsilon < u_p$.
Ainsi $u_p = u_p - u_{p-1} + u_{p-1} \leq \varepsilon + c - \varepsilon = c < c+\varepsilon$.
Par conséquent $u_p \in \,]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$.
On a donc montré $c \in Val(u)$ et que $Val(u)$ est un intervalle.

2. Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longmapsto [a,b]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite, d'où $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Réciproquement on suppose $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors, d'après ce qui précède, $Val(u)$ est un intervalle.
On suppose par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence distinctes l_1, l_2.
Donc $\frac{l_1+l_2}{2} \in Val(u)$, ainsi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in [l_1, l_2] \subset Val(u)$.
Ainsi il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_p$$

Donc par continuité de f,

$$u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(u_p)$$

Puis, comme $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$u_{\varphi(n)+1} = u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + u_p$$

Ainsi, par unicité de la limite, $f(u_p) = u_p$.
Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang p ce qui contredit l'existence des deux valeurs d'adhérence distinctes.
On a donc montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence, et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\square$

Exercice.

1. Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

2. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

   On pourra commencer par le cas $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p = 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q$

3. En déduire que $\|\cdot\|_p : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par concavité de la fonction ln,
   $$\forall \lambda \in [0,1], \ln((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)\ln(x) + \lambda \ln(y) = \ln(x^{1-\lambda}y^{\lambda})$$
   Donc, par croissance de la fonction exp,
   $$\forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \geq x^{1-\lambda}y^{\lambda}$$
   Ainsi, pour $\lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$,
   $$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}$$
   Puis, en appliquant ce qui précède avec x^p, y^q,
   $$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

2. On suppose $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p = 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q$.
   Ainsi, d'après la question précédente,
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
   Puis, dans le cas général, en appliquant ce qui précède avec $\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, on obtient
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. L'application $\|\cdot\|_p$ vérifie bien les axiomes d'une norme : seul l'inégalité triangulaire est non trivial.
   Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   Alors on a
   $$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$
   D'où, par la question précédente,
   $$\|x+y\|_p^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$
   Puis, après simplification,
   $$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\frac{\|x+y\|_p^p}{\|x+y\|_p}$$
   ce qui conclut.

$\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de Bolzanno-Weierstrass en dimension finie. On pourra commencer par énoncer clairement les étapes de la démonstration.

Réponse. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$ bornée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, ie il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration.
On commence par traiter le cas réel : On crée deux suites adjacentes et on utilise le théorème des gendarmes pour conclure.
Puis pour $\mathbb{R}^n$ on extrait coordonnée par coordonnées avec une composée d'extractrices.
Enfin pour le cas complexe, on utilise le fait que $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\square$

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi
   $$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$
   D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$
   Donc
   $$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$
   Par conséquent
   $$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$
   Donc, d'après le théorème de Bolzanno-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} l$$
   Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Par conséquent, comme φ est croissante,
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \varepsilon$$
   ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$.

Le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{Q}$ car par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car convergente dans $\mathbb{R}$ vers e mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. □

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])^{\mathbb{N}}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\forall x \in [a,b], f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Montrer que si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors f est continue sur $[a,b]$.
3. Montrer que la convergence simple ne suffit pas. Trouver un contre-exemple.

Démonstration.

1. On suppose que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Soit $x \in [a,b]$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$
   D'où $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Soit $x \in [a,b]$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par convergence uniforme on a l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\|f - f_N\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
   Or f_N est continue en x, donc il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$\forall y \in [a,b], |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
   Ainsi
   $$\forall y \in [a,b], |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| \leq \varepsilon$$
   ce qui montre que f est continue en x donc sur $[a,b]$.

□

Question de cours. Comment caractériser l'équivalence des normes par les suites convergentes ? Le démontrer.

Réponse. Deux normes sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour l'une est convergente de même limite pour l'autre.

Démonstration. Soit N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{K}^n$.

1. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes : il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$C_1 N_1 \leq N_2 \leq C_2 N_2$$
Ainsi, grâce à ces inégalités, on en déduit qu'une suite convergente pour N_1 (ou N_2) est convergente pour N_2 (ou N_1) et que dans ce cas les limites sont les mêmes.
2. Réciproquement on suppose que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$N_1(x_n) > nN_2(x_n)$$
Puis on considère
$$y_n = \frac{x_n}{N_2(x_n)\sqrt{n}}$$
Ainsi
$$N_2(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Mais
$$N_1(y_n) = \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
D'où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme N_2 mais pas pour la norme N_1.

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes.

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent également et vers la même limite.
2. Réciproquement on suppose que
$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \text{ et } u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$
Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N_1, \|u_{2n} - l\| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \geq N_2, \|u_{2n+1} - l\| \leq \varepsilon$$
Donc
$$\forall n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1), \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

3. On peut considérer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, montrer que $|||\cdot||| : A \in M_n(\mathbb{K}) \longmapsto \underset{x\in S(0,1)}{sup} \|Ax\|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$, appelé norme matricielle induite par $\|\cdot\|$.
2. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_\infty$ vérifie

$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

3. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_1$ vérifie

$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

Démonstration.

1. L'application $|||\cdot|||$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $|||A||| = 0$.
   Alors $\forall x \in S(0,1), \|Ax\| = 0$ ie $\forall A \in S(0,1), Ax = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$, alors $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc $A\frac{x}{\|x\|} = 0$ ie $Ax = 0$.
   Par conséquent $A = 0$.
   Puis $|||\cdot|||$ vérifie l'inégalité triangulaire et l'homogénéité car $\|\cdot\|$ les vérifie.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in S_\infty(0,1)$, alors

$$\|Ax\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j\right| \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

   D'où

$$|||A|||_\infty \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

   Puis il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n}|A_{kj}| = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum\limits_{j=1}^{n}|A_{ij}|$.
   On considère alors $x \in \mathbb{K}^n$ défini par

$$\forall j \in [\![1,n]\!], x_j = \begin{cases} \frac{\overline{A_{kj}}}{|A_{kj}|} & \text{si } A_{kj} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Ainsi $x \in S_\infty(0,1)$ et

$$\forall j \in [\![1,n]\!], |(Ax)_j| \leq \|Ax\|_\infty \leq |||A|||_\infty \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

Avec

$$|(Ax)_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} A_{kj}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n}|A_{kj}| = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{kj}|$$

D'où

$$\|Ax\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

Par conséquent

$$|||A|||_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in S_1(0,1)$, alors

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}| = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

D'où

$$|||A|||_1 \leq \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

Puis il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{n}|A_{ik}| = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$.
On considère alors $x = e_k \in \mathbb{K}^n$.
Ainsi $x \in S_1(0,1)$ et

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_{ik}| = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

Par conséquent

$$|||A|||_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

$\square$