Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Réponse. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles données par, pour tout $x \in U, i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$. La composée $g \circ f$ est différentiable en x de différentielle

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$$

Ainsi, en passant à la matrice jacobienne,

$$Jac(g \circ f)(x) = Jac(g)(f(x)) \times Jac(f)(x)$$

D'où, pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

□

Exercice. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0, 1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le compacte $\overline{B}(0, 1)$, donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0, x_1 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que

$$f(x_0) = \min_{x \in \overline{B}(0,1)} f(x) =: m \text{ et } f(x_1) = \max_{x \in \overline{B}(0,1)} f(x) =: M$$

Si $m = M$ alors f est constante sur $\overline{B}(0, 1)$, donc $df(x) = 0$ pour tout $x \in B(0, 1)$.
Sinon $m < M$, donc, comme f est constante S, x_0 ou x_1 n'est pas dans S. Supposons par exemple $x_0 \notin S$. Alors $x_0 \in B(0, 1)$. Donc x_0 est un point critique de f différentiable, d'où $df(x_0) = 0$. □

Exercice. ** On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$. Calculer sa transformée de Fourier F_α définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F(G_\alpha)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Réponse. On a

$$F(G_\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$$

Démonstration. Vérifions le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on note

$$f(x,\xi) = e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}.$$

Alors :

1. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,\xi)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \longmapsto f(x,\xi)$ est de classe C^1 et
$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi) = -ixe^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$$
3. On a
$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}, \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)\right| \leq |x|e^{-\alpha x^2} =: \varphi(x)$$
avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $F(G_\alpha)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} xe^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx$$

Puis par intégration par parties

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)'(\xi) = i \left[\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\xi}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2\alpha} F(G_\alpha)(\xi)$$

D'où, par résolution de l'équation différentielle,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)(\xi) = F(G_\alpha)(0) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$$

□

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$. On considère $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U, i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Démonstration.

1. Sens direct : On suppose f holomorphe sur U. Soit $z = x + iy \in U$. Alors
$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \frac{f(z+s)-f(z)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s+iy)-f(x+iy)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
De même
$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \frac{f(z+is)-f(z)}{is} = -i\lim_{s\to 0} \frac{f(x+i(y+s))-f(x+iy)}{s} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
De plus
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}$$
Donc, par identification des parties réelles et imaginaires, les dérivées partielles de u et v sont continues, ainsi u et v sont de classe C^1, et
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
Sens indirect : Réciproquement on suppose que u et v soient de classe C^1 et vérifient les conditions de Cauchy. Soit $z = x + iy \in U$. Or l'application f est différentiable en (x, y), donc
$$\begin{aligned} f(x+s,y+t) - f(x,y) &\underset{s,t\to 0}{=} df(x,y)(s,t) + o(\|(s,t)\|) \\ &= sdf(x,y)(1,0) + tdf(x,y)(0,1) + o(\|(s,t)\|) \\ &= s\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + o(\|(s,t)\|) \end{aligned}$$
Or, d'après les conditions de Cauchy, on a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
Donc
$$\begin{aligned} f(x+s,y+t) - f(x,y) &\underset{s,t\to 0}{=} s\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + it\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(\|(s,t)\|) \\ &= (s+it)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(|s+it|) \end{aligned}$$
Ainsi
$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \underset{h\to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
Donc f est dérivable en z et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial}(x, y)$, d'où $z \longmapsto f'(z)$ est continue car u et v de classe C^1. Par conséquent f est holomorphe.
2. On a, d'après la question précédente et le lemme de Schwarz sur les dérivées partielles,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
D'où u est harmonique. On montre de même que v est harmonique.

□

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Réponse. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable et pour tout $x \in U$,

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$, alors, comme f est différentiable en x, on a

$$f(x+h) \underset{\|h\| \to 0}{=} f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)$$

Puis g est différentiable en $f(x)$ donc

$$g(f(x)+h') \underset{\|h'\| \to 0}{=} g(f(x)) + dg(f(x))(h') + o(\|h'\|)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &\underset{\|h\| \to 0}{=} g(f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h) + o(\|h\|)) + o(\|df(x)(h) + o(\|h\|)\|) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h)) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est différentiable en x et $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. □

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Démonstration. Soit $P, H \in E$. Alors

$$\phi(P+H) = \int_0^1 (P(t)+H(t))^3 dt = \phi(P) + 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt + \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt$$

avec $H \longmapsto 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$ linéaire et

$$\left| \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt \right| \leq \|H\|^2 \left(3\int_0^1 |P(t)| dt + \|H\| \right) \underset{\|H\| \to 0}{=} o(\|H\|).$$

D'où ϕ est différentiable en P et

$$\forall H \in E, d\phi(P)(H) = 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt.$$

□

Exercice. * On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt$.

1. Etudier l'ensemble de définition.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Démonstration.

1. On considère $g(x,t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors g est continue,

$$g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

   Donc $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1]$.
   Si $x \leq 0$ alors

$$g(x,t) \geq \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

   Donc $g(x,\cdot)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Si $x > 0$ alors

$$g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

   Donc $g(x,\cdot)$ est intégrbale sur $[1,+\infty[$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{t^2+t}} = -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}.$$

   Donc pour tout $[a,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-ta} \in L^1(]0,+\infty[).$$

   Par conséquent, par théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}dt.$$

□

Exercice. ** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, par changement de variable linéaire $ux = t$ (licite car $x \neq 0$)

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = x \int_0^1 f'(ux)du$$

Ainsi

$$g(x) = \int_0^1 f'(ux)du$$

De même en $x = 0$, on a

$$g(0) = f'(0) = \int_0^1 f'(0)du.$$

Donc

$$g = \int_0^1 f(u \times \cdot)du$$

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (dont les hypothèses sont facilement vérifiables sur le segment $[0, 1]$), on a g de classe C^∞. $\square$

Question de cours. Déterminer la dérivée de $B \circ (f, g)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow E, g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ dérivables et $B : E \times F \longrightarrow G$ application bilinéaire avec E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie. Le démontrer.

Réponse. Si f et g sont dérivable alors $B \circ (f, g)$ est dérivables et

$$(B \circ (f, g))' = B \circ (f', g) + B \circ (f, g').$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{B(f(t), g(t)) - B(f(s), g(s))}{t - s} = \frac{B(f(t), g(t)) - B(f(s), g(t)) + B(f(s), g(t)) - B(f(s), g(s))}{t - s}$$

$$= B\left(\frac{f(t) - f(s)}{t - s}, g(t)\right) + B\left(f(s), \frac{g(t) - g(s)}{t - s}\right) \underset{s \to t}{\longrightarrow} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)),$$

grâce à la continuité de B (bilinéaire en dimension finie) et de f. □

Exercice. ** Soit I intervalle réel, $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $F : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t)dt$ est continue sur I.

Démonstration. Soit $x \in I$ tel que $v(x) - u(x) \neq 0$. Alors on effectue le changement de variable affine $t = u(x) + s(v(x) - u(x))$ $(dt = (v(x) - u(x))ds)$ pour obtenir

$$F(x) = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(x, u(x) + s(v(x) - u(x)))ds.$$

De plus cette égalité est également vérifiée si $v(x) - u(x) = 0$.
On considère $G(x, s) = f(x, u(x) + s(v(x) - u(x)))$. Alors G est continue sur $I \times [0, 1]$ et pour tout compact $C \subset I$,

$$\forall x \in C, \forall s \in [0, 1], |G(x, s)| \leq M \in L^1([0, 1]).$$

où l'existence de $M \in \mathbb{R}_+^*$ est assuré par la continuité de $(x, s) \longmapsto f(x, u(x)+s(v(x)-u(x)))$ sur le compact $C \times [0, 1]$.
Par conséquent, d'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, F est continue sur I. □

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
   Indication : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ alors la fonction somme $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ de différentielle $d\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Démonstration.

1. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors
$$exp(0+H) = exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$$
Avec $I_n = exp(O)$ et $[H \longmapsto H] = id_{M_n(\mathbb{R})}$ linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
De plus, comme $\|\cdot\|$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$, on a
$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H^k\|}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = e^{\|H\|} - \|H\| - 1$$
Puis par développement limité de l'exponentielle réelle et en manipulant des o matriciels, on obtient que
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \underset{\|H\| \to 0}{=} o(\|H\|)$$
Par conséquent exp est différentiable en 0 et $dexp(0) = id_{M_n(\mathbb{R})}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété
$$\mathcal{P}(k) : \varphi_k(A+H) \underset{\|H\| \to 0}{=} A^k + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$
   — Pour $k = 1$ on a directement
$$\varphi_1(A+H) = A + H \underset{\|H\| \to 0}{=} A + H + o(\|H\|)$$
   — On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\forall H \in M_n(K), (A+H)^{k+1} = (A+H)^k(A+H) = \varphi_k(A+H)(A+H)$$
   Donc par hypothèse de récurrence
$$\begin{aligned}
(A+H)^{k+1} & \underset{\|H\| \to 0}{=} \left(A^k + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|) \right)(A+H) \\
& = A^{k+1} + A^k H + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^{j+1} + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\
& = A^{k+1} + A^k H A^0 + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\
& = A^{k+1} + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|)
\end{aligned}$$

avec, comme $\mathbb{R}$ est un anneau commutatif,

$$\left\| \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \right\| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} \left\|A^i H A^j H\right\| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\|^2 = \|H\|^2 k \|A\|^{k-1}$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \underset{\|H\|\to 0}{=} o(\|H\|)$$

Finalement on a bien

$$\mathcal{P}(k+1) : \varphi_{k+1}(A+H) \underset{\|H\|\to 0}{=} A^{k+1} + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k\\ i+j=k}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

Ce qui achève la récurrence.
Par conséquent φ_k est différentiable en A de différentielle donnée par

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. Comme $\varphi_0 = I_n$ constante, $d\varphi_0(A) = 0$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \|d\varphi_k(A)(H)\| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} \left\|A^i H A^j\right\| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\| = k \|A\|^{k-1} \|H\|$$

Donc $d\varphi_k(A)$ est continue (automatique car linéaire en dimension finie) et sa norme d'opérateur vérifie

$$\|d\varphi_k(A)\| \leq k \|A\|^{k-1}$$

Par conséquent $\phi_k := \frac{\varphi_k}{k!}$ est également différentiable en A et sa différentielle vérifie

$$\|d\phi_k(A)\| = \frac{\|d\varphi_k(A)\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi la série d'applications linéaires $\sum d\phi_k$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}))$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$, donc uniformément convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$.
Or $M_n(\mathbb{R})$ et $L(M_n(\mathbb{R}))$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
Ainsi, d'après le théorème, la fonction somme $exp = \sum \phi_k$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}), dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$$

$\square$