Question de cours. ** Donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire en fonction de sa fonction génératrice. Le démontrer.

Réponse. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k-fois dérivable à gauche en 1. Dans ce cas

$$G_X^{(k)}(1-) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)...(k-r+1)\mathbb{P}(X=k).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = G'_X(1-),$$

et

$$G''(1-) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2) - G'_X(1-).$$

Donc

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = G''_X(1-) + G'_X(1-) - G'_X(1-)^2.$$

Démonstration. Si X admet un moment d'ordre 1 alors il suffit d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. Réciproquement si G_X est dérivable à gauche en 1 alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \lim_{s\to 1-} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) \sum_{j=0}^{k-1} s^j$$

$$\leq \lim_{s\to 1-} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \sum_{j=0}^{k-1} s^j = \lim_{s\to 1-} \frac{G_X(1) - G_X(s)}{1-s} = G'_X(1-).$$

D'où $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ est convergente i.e. X admet un moment d'ordre 1.
On procède de même pour les ordres supérieurs. □

Exercice. * Soit $a, t \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme dans $\{-1, 1\}$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$

3. En déduire

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Démonstration.

1. On a par croissance et bijectivité de l'exponentielle et inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}}$$

2. Par indépendance et identique distribution des X_n on a

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) = \mathbb{E}(e^{tX_1})^n$$

Or, par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} = ch(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

où la pénultième égalité est justifiée par

$$ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!2^n} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$

3. Grâce aux deux questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-ta} e^{\frac{t^2 n}{2}} = e^{t\left(\frac{tn}{2} - a\right)}$$

D'où, pour $t = \frac{a}{n}$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

$\square$

Exercice. *** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0,1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Démonstration.

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètre n, x.
   Ainsi, par lemme de transfert,
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$
2. On a par inégalité de Bienaymé-Tchebychev
$$\sum_{\substack{1\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n\delta) \le \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2}$$
   Or $S_n \sim B(n,x)$, donc
$$\sum_{\substack{1\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$
3. La fonction f est continue sur $[0,1]$ compact, donc par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1$.
   Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall x,y \in [0,1], |x-y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$
   Ainsi pour $x \in [0,1]$,
$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \le \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$
   Donc, par inégalité triangulaire,
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \le \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\le\alpha\right\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}}\right)$$
   Ainsi, avec ce qui précède,
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$
   Ainsi
$$\|B_n(f) - f\|_\infty \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$
   Or $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ pour $n \ge N$.
   Donc, pour $n \ge N$,
$$\|B_n(f) - f\|_\infty \le 2\varepsilon$$
   Ce qui montre que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

□

Question de cours. * Enoncer et démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Réponse. Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance finie et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

De plus si X admet un moment d'ordre 2 alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| > a}} |x| \mathbb{P}(X = x) \geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| > a}} \mathbb{P}(X = x) = a\mathbb{P}(|X| > a).$$

Puis on applique ceci avec la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ et la constante a^2, pour obtenir

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 > a^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}.$$

□

Exercice. * Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq U \leq K$.

1. Exprimer $\sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(U \geq j)$ en fonction de $\mathbb{E}(U)$.
2. Calculer de même $\sum_{j=1}^{K} j^2 \mathbb{P}(U \geq j)$ en fonction de $\mathbb{E}(U), \mathbb{E}(U^2)$ et $\mathbb{E}(U^3)$.

Démonstration.

1. On a
$$\sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(U \geq j) = \sum_{j=1}^{K} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{U \geq j\}} = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{K} \mathbb{1}_{\{U \geq j\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{\min(K,U)} 1\right) = \mathbb{E}(U).$$
2. De même
$$\sum_{j=1}^{K} j^2 \mathbb{P}(U \geq j) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{U} j^2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{U(U+1)(2U+1)}{6}\right) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(U^3) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(U^2) + \frac{1}{6}\mathbb{E}(U).$$

□

Exercice. * Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire entière positive indépendante des précédentes. On considère la variable $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$.

Montrer que $G_S = G_N \circ G$, où G est la fonction génératrice commune des X_n.

Démonstration. Soit $t \in [-1, 1]$, alors

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k)t^k$$

avec, par formule des probabilités totales et indépendance,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k, N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{P}(N = n)$$

Ainsi

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(S_n = k)t^k$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(S_n = k)|t|^k \leq 1$$

Donc la famille est sommable et on peut intervertir les sommes, d'où

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)G_{S_n}(t)$$

Puis par indépendance

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)G(t)^n = G_N(G(t))$$

Ainsi $G_S = G_N \circ G$. □

Exercice. * Soit X_n, Y_n deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. On considère les variables aléatoires Z_n et T_n définies par

$$Z_n = |X_n - Y_n|, T_n = \min(X_n, Y_n).$$

1. Déterminer $\mathbb{E}(Z_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

1. On a $0 \leq Z_n \leq X_n + Y_n$, donc Z_n admet une espérance. Puis, par théorème de transfert,

   $$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k,l=0}^{n} |k - l|\mathbb{P}(X_n = k, Y_n = l).$$

   Ainsi, par indépendance,

   $$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k,l=0}^{n} |k - l|\mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}(Y_n = l).$$

Donc, comme X et Y suivent des lois uniformes,

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k,l=0}^{n}|k-l| = \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(i-j) = \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \frac{i(i-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2+i}{2} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}i = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} + \frac{n}{2(n+1)}.$$

D'où

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

2. On a l'identité suivante

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, |a-b| = a+b-2\min(a,b).$$

Donc T_n admet une espérance et

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(Y_n) - \mathbb{E}(Z_n)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

□

Exercice. * Soit U, V deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(U=-2)=\frac{1}{3}, \mathbb{P}(U=1)=\frac{2}{3}, \mathbb{P}(V=1)=\frac{1}{2}, \mathbb{P}(V=2)=\frac{1}{2}.$$

On définit

$$W=(-1)^V U.$$

1. Déterminer la covariance de V et W.
2. Montrer que V^2 et W^2 sont indépendantes.
3. Déterminer $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}} W^3\right)$.
4. En déduire que V et W ne sont pas indépendants.

Démonstration.

1. On a $|W|=|U|$, donc W admet une espérance et, par indépendance,

$$\mathbb{E}(W)=\mathbb{E}\left((-1)^V\right)\mathbb{E}(U)=0.$$

De même $|VW| \leq |U||V|$ et U et V admettent des moments d'ordre 2, donc VW admet une espérance et, par indépendance,

$$\mathbb{E}(VW)=\mathbb{E}\left((-1)^V V\right)\mathbb{E}(U)=0.$$

Par conséquent

$$\operatorname{Cov}(VW)=\mathbb{E}(VW)-\mathbb{E}(V)\mathbb{E}(W)=0.$$

2. On a $W^2=U^2$, avec U et V indépendants, donc W^2 et V^2 sont indépendants.
3. On a

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}} W^3\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}}(-1)^3 U^3\right)=-\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}} U^3\right).$$

Puis, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}} W^3\right)=-\mathbb{P}(V=1)\mathbb{E}(U^3).$$

Ainsi, après théorème de transfert, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}} W^3\right)=1.$$

4. On a

$$\mathbb{E}(W^3)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{V=1\}} W^3)+\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{V=2\}} W^3)=-\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{V=1\}} U^3)+\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{V=2\}} U^3).$$

Puis, par indépendance,

$$\mathbb{E}(W^3)=(-\mathbb{P}(V=1)+\mathbb{P}(V=2))\mathbb{E}(U^3)=0.$$

On a donc

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{V=1} W^3\right) \neq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{V=1\}}\mathbb{E}(W^3).$$

Par conséquent V et W ne sont pas indépendants.

$\square$

Exercice. ** Soit $p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p+q+r=1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y_n = (U_n, V_n)$ un vecteur aléatoire à la valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi trinomiale i.e. pour tout $k, l \in \mathbb{N}^2$ tel que $k+l \leq n$,

$$\mathbb{P}(Y_n = (k,l)) = \frac{n!}{k!l!(n-(k+l))!} p^k q^l r^{n-(k+l)}.$$

On note également $Y_0 = (0,0)$.

1. Montrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales. Déterminer les paramètres.
2. Les variables aléatoires U_n et V_n sont-elles indépendantes ?
3. Démontrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}.$$
4. En déduire $\mathbb{E}(U_n V_n)$.
5. Calculer $Cov(U_n, V_n)$ et $Var(U_n + V_n)$.

Démonstration.

1. La famille des $\{V_n = l\}$, $l \in \mathbb{N}$ forment un système complet d'événements, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(U_n = k) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(U_n = k, V_n = l) = \sum_{l=0}^{n-k} \frac{n!}{k!l!(n-(k+l))!} p^k q^l r^{n-(k+l)}$$
$$= \frac{p^k n!}{k!(n-k)!} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} q^l r^{(n-k)-l} = \binom{n}{k} p^k (q+r)^{n-k}.$$
Donc $U_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ car $p+q+r=1$. De même $V_n \sim \mathcal{B}(n,q)$.
2. On a
$$\mathbb{P}(U_n = 0, V_n = 0) = r^n \neq (1-p)^n (1-q)^n = \mathbb{P}(U_n = 0)\mathbb{P}(V_n = 0).$$
Donc U_n et V_n ne sont pas indépendants.
3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$
Donc, en dérivant par rapport à x des deux côtés, on a
$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k}.$$

4. Par théorème de transfert on a

$$\mathbb{E}(U_nV_n) = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} kl\mathbb{P}(U_n = k, V_n = l) = \sum_{\substack{k,l\geq 1\\ k+l\leq n}} kl\frac{n!}{k!l!(n-(k+l))!}p^kq^lr^{n-(k+l)}.$$

Donc, en utilisant la question précédente,

$$\mathbb{E}(U_nV_n) = \sum_{k=1}^{n} kp^k\binom{n}{k}\sum_{l=1}^{n-k} l\binom{n-k}{l}q^lr^{n-(k+l)} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(n-k)q(q+r)^{n-k-1}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(U_nV_n) = q\sum_{k=1}^{n} k(n-k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k-1} = qn\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

D'où, en utilisant la question précédente,

$$\mathbb{E}(U_nV_n) = pqn(n-1).$$

5. On a

$$\mathrm{Cov}(U_n, V_n) = \mathbb{E}(U_nV_n) - \mathbb{E}(U_n)\mathbb{E}(V_n) = pqn(n-1) - npnq = pqn(n-1) - n^2pq.$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(U_n, V_n) = -npq.$$

Ainsi

$$\mathrm{Var}(U_n+V_n) = \mathrm{Var}(U_n)+\mathrm{Var}(V_n)+2\mathrm{Cov}(U_n, V_n) = np(1-p)+nq(1-q)-2npq = nr(1-r).$$

□

Exercice. *** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 1 et $(X_{i,n})_{i\in\mathbb{N}^*,n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On considère la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Z_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}.$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus d'une génération au temps n et $X_{i,n}$ le nombre d'individus engendrés par le i-ème individu à l'instant n.

1. On note G la fonction génératrice de X et, pour $n \in \mathbb{N}$, G_n celle de Z_n. Montrer que $G_{n+1} = G_n \circ G$.
2. On note $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers un réel que l'on note α. Que représente α pour le problème ?
3. Montrer que α est le plus petit point fixe de G.

4. Dans quel(s) cas a-t-on extinction presque sûr de la population ?

Démonstration.

1. Soit $t \in]0,1[$. Alors

$$G_{n+1}(t) = \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{N=0}^{+\infty} t^{\sum_{i=1}^{N} X_{i,n}} \mathbb{1}_{\{Z_n=N\}}\right).$$

Or

$$\mathbb{E}\left(\sum_{N=0}^{+\infty} |t|^{\sum_{i=1}^{N} X_{i,n}} \mathbb{1}_{\{Z_n=N\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{Z_n=N\}}\right) = 1 < +\infty.$$

Donc, par théorème de Fubini-Tonelli,

$$G_{n+1}(t) = \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^{N} X_{i,n}} \mathbb{1}_{\{Z_n=N\}}\right) = \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{N} t^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{\{Z_n=N\}}\right).$$

Or Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et des $X_{i,n-1}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, par récurrence Z_n ne dépend que des $X_{i,j}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. D'où, par indépendance des $X_{i,j}$, Z_n est indépendant de $X_{i,n}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par conséquent

$$G_{n+1}(t) = \sum_{N=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{E}(t^{X_{i,n}}) \mathbb{P}(Z_n = N)$$

Puis, par identique distribution,

$$G_{n+1}(t) = \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{E}(t^X)^N \mathbb{P}(Z_n = N) = G_n(G(t)).$$

2. Si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$, donc

$$x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \alpha_{n+1}.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par 1, d'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
De plus l'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}$ correspond à l'événement "la population s'éteint". Il s'agit d'une réunion d'événements croissants, d'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \alpha.$$

3. On considère $\beta = \min\{t \in [0,1], G(t) = t\}$ (existe car 1 est point fixe et G continue). Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$G'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) x^{k-1} \geq 0.$$

Donc G est croissante sur $[0,1]$. Ainsi

$$G([0,\beta]) \subset [G(0), G(\beta)] = [G(0), \beta] \subset [0,\beta].$$

Ainsi, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = G^n(0) \in [0,\beta].$$

D'où

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_n \in [0,\beta].$$

De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(x_n).$$

Donc, par passage à la limite et continuité, $\alpha = G(\alpha)$, d'où $\beta \leq \alpha$.
Par conséquent $\alpha = \beta$.

4. Il y a extinction presque sûr si et seulement si $\alpha = 1$ i.e. si et seulement si 1 est le seul point fixe de G.
Or $G'(1) = \mathbb{E}(X)$. Donc :
   (a) Si $\mathbb{E}(X) > 1$ alors

   $$(G - id_{[0,1]})'(1) = G'(1) - 1 > 0.$$

   Donc $G - id_{[0,1]}$ est strictement croissante au voisinage à gauche de 1. De plus

   $$(G - id_{[0,1]})(1) = 0.$$

   Donc $G - id_{[0,1]} < 0$ sur un intervalle de la forme $]\varepsilon, 1[$ avec $\varepsilon \in]0,1[$. On a également

   $$(G - id_{[0,1]})(0) = \mathbb{P}(X = 0) \geq 0.$$

   Ainsi, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in]0,1[$ tel que $G(t) = t$.
   Par conséquent $\alpha < 1$.

   (b) Si $\mathbb{E}(X) < 1$ alors

   $$(G - id_{[0,1]})'(1) = G'(1) - 1 < 0.$$

   Donc $G - id_{[0,1]}$ est strictement décroissante au voisinage à gauche de 1. De plus

   $$(G - id_{[0,1]})(1) = 0.$$

   Donc $G - id_{[0,1]} > 0$ sur un intervalle de la forme $]\varepsilon, 1[$ avec $\varepsilon \in]0,1[$.
   On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in [0,1[$ tel que $G_X(t) = t$. Or

   $$\forall x \in [0,1], G_X''(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)x^{k-2} \geq 0.$$

   Donc G_X est convexe sur $[0,1]$. En particulier le graphe de G_X est en dessous de sa corde entre t et 1 :

   $$\forall x \in [t,1], G(x) \leq \frac{G(t) - G(1)}{t-1} x = x.$$

   Ce qui contre $G - id_{[0,1]} > 0$ sur $]\varepsilon, 1[$. Par conséquent $\alpha = 1$ i.e. l'extinction est presque sûr.

(c) Si $\mathbb{E}(X) = 1$ alors distinguons encore deux cas :

i. Si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ alors

$$1 = \mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1).$$

Donc $X = 1$ presque sûrement puis $Z_n = 1$ presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\alpha = 0$.

ii. Sinon il existe $k \in [\![2, +\infty]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X = k) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$G''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)x^{k-2} > 0.$$

Donc G est strictement convexe sur $]0, 1[$. Ainsi le graphe de G se situe strictement au dessus de sa tangente en 1 d'équation $y = x$. Par conséquent $\alpha = 1$ et il y a extinction presque sûr.

$\square$