Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Réponse. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles données par, pour tout $x \in U, i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$. La composée $g \circ f$ est différentiable en x de différentielle

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$$

Ainsi, en passant à la matrice jacobienne,

$$Jac(g \circ f)(x) = Jac(g)(f(x)) \times Jac(f)(x)$$

D'où, pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

□

Exercice. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0, 1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le compacte $\overline{B}(0, 1)$, donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0, x_1 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que

$$f(x_0) = \min_{x \in \overline{B}(0,1)} f(x) =: m \text{ et } f(x_1) = \max_{x \in \overline{B}(0,1)} f(x) =: M$$

Si $m = M$ alors f est constante sur $\overline{B}(0, 1)$, donc $df(x) = 0$ pour tout $x \in B(0, 1)$.
Sinon $m < M$, donc, comme f est constante S, x_0 ou x_1 n'est pas dans S. Supposons par exemple $x_0 \notin S$. Alors $x_0 \in B(0, 1)$. Donc x_0 est un point critique de f différentiable, d'où $df(x_0) = 0$. □

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est α-homogène si

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

1. Citer des exemples de fonction α-homogène.
2. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) f est α-homogène.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$,
   $$f(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Démonstration.

1. Les fonctions de la forme
$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}x_j^{\beta_{i,j}}, x\in\mathbb{R}^m,$$
avec, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^{m}\beta_{i,j}=\alpha.$$

2. <u>Sens direct</u> : On suppose que f est α-homogène. Alors
$$\forall x\in\mathbb{R}^m\backslash\{0\},\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*, f(\lambda x)=\lambda^\alpha f(x).$$
Ainsi, en dérivant par rapport à λ, on obtient, par règle de la chaîne,
$$\forall x\in\mathbb{R}^m\backslash\{0\},\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)\lambda x_i=\alpha\lambda^{\alpha-1}f(x).$$
En particulier, pour $\lambda=1$, on obtient
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=\alpha f(x).$$
<u>Sens indirect</u> : Réciproquement on suppose que
$$\forall x\in\mathbb{R}^m\backslash\{0\}, f(x)=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$
Soit $x\in\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$. On considère la fonction $g:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$$g(\lambda)=\frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha},\lambda\in\mathbb{R}_+^*.$$
Alors g est dérivable car f est différentiable, et, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$,
$$g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda^\alpha}df_{\lambda x}(x)-\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}f(\lambda x)=\frac{1}{\lambda^\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)x_i-\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}f(\lambda x).$$
Ainsi, grâce à l'hypothèse appliquée au vecteur λx,
$$g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda^\alpha}\frac{\alpha}{\lambda}f(\lambda x)-\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}f(\lambda x)=0.$$
D'où g est une fonction constante. En particulier, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$,
$$\frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha}=g(\lambda)=g(1)=f(x).$$

$\square$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que

$$(E) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

On considère également $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, g(u, v) = f(u + v, u - v).$$

1. Montrer que g est de classe C^2 et vérifie

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$

2. En déduire toutes les fonctions de classe C^2 vérifiant (E)

Démonstration.

1. L'application g est classe C^2 comme composée de telles applications. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = g\left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right) =: g(u, v).$$

Donc, par règle de la chaîne,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \times \frac{1}{2}.$$

D'où, après utilisation du lemme de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) \times \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \times \frac{1}{4}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v).$$

D'où, comme f vérifie (E),

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$

2. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)(u, v) = 0.$$

Donc il existe $k_1(v) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = k_1(v).$$

Ainsi k_1 est de classe C^1. On note k une primitive de k_1. Alors k est de classe C^2 et il existe $h(u) \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(u, v) = h(u) + k(v).$$

En particulier h est de classe C^2.
Par conséquent

$$f(x,y) = h\left(\frac{x+y}{2}\right) + k\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Réciproquement les fonctions de cette forme vérifient (E).

$\square$

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Réponse. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable et pour tout $x \in U$,

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$, alors, comme f est différentiable en x, on a

$$f(x+h) \underset{\|h\| \to 0}{=} f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)$$

Puis g est différentiable en $f(x)$ donc

$$g(f(x)+h') \underset{\|h'\| \to 0}{=} g(f(x)) + dg(f(x))(h') + o(\|h'\|)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &\underset{\|h\| \to 0}{=} g(f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h) + o(\|h\|)) + o(\|df(x)(h) + o(\|h\|)\|) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h)) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est différentiable en x et $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. □

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Démonstration. Soit $P, H \in E$. Alors

$$\phi(P+H) = \int_0^1 (P(t)+H(t))^3 dt = \phi(P) + 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt + \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt$$

avec $H \longmapsto 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$ linéaire et

$$\left| \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt \right| \leq \|H\|^2 \left(3\int_0^1 |P(t)| dt + \|H\| \right) \underset{\|H\| \to 0}{=} o(\|H\|).$$

D'où ϕ est différentiable en P et

$$\forall H \in E, d\phi(P)(H) = 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt.$$

□

Exercice. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Déterminer les fonctions harmoniques $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$f(x,y) = \varphi(u(x,y)) \text{ avec } u(x,y) = \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \text{ et } \varphi \in C^2(]-1,1[,\mathbb{R}).$$

Démonstration. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f = 0.$$

Or

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\frac{\sin(2x)}{\text{ch}(2y)}, \frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{\text{sh}(2y)\cos(2x)}{(\text{ch}(2y))^2}.$$

D'où, par règle de la chaîne,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\varphi'(u(x,y))\frac{2\sin(2x)}{\text{ch}(2y)}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\varphi'(u)\frac{2\text{sh}(2y)\cos(2x)}{(\text{ch}(2y))^2}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ..., \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ...$$

Puis, après simplifications,

$$0 = \Delta f = 4\frac{(\text{ch}(2y))^2 - (\cos(2x))^2}{(\text{ch}(2y))^4}\varphi''(u) - \frac{8\cos(2x)}{(\text{ch}(2y))^3}\varphi'(u).$$

Puis, comme ch > 1 sur $\mathbb{R}^*$,

$$(1-u^2)\varphi''(u) - 2u\varphi'(u) = 0.$$

De plus, $|u| < 1$ sur U, donc l'équation différentielle se résout en

$$\varphi'(u) = \frac{2a}{1-u^2} = a\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right), a \in \mathbb{R}.$$

Puis

$$\varphi(u) = a\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + b, b \in \mathbb{R}.$$

Finalement les fonctions cherchées sont exactement de la forme

$$f(x,y) = a\ln\left(\frac{\text{ch}(2y) + \cos(2x)}{\text{ch}(2y) - \cos(2x)}\right).$$

□

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$. On considère $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U, i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Démonstration.

1. Sens direct : On suppose f holomorphe sur U. Soit $z = x + iy \in U$. Alors

$$f'(z) = \lim_{s \to 0} \frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+s+iy) - f(x+iy)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

De même

$$f'(z) = \lim_{s \to 0} \frac{f(z+is) - f(z)}{is} = -i \lim_{s \to 0} \frac{f(x+i(y+s)) - f(x+iy)}{s} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

Donc, par identification des parties réelles et imaginaires, les dérivées partielles de u et v sont continues, ainsi u et v sont de classe C^1, et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Sens indirect : Réciproquement on suppose que u et v soient de classe C^1 et vérifient les conditions de Cauchy. Soit $z = x + iy \in U$. Or l'application f est différentiable en (x, y), donc

$$f(x+s, y+t) - f(x, y) \underset{s,t \to 0}{=} df(x, y)(s, t) + o(\|(s, t)\|)$$

$$= s df(x, y)(1, 0) + t df(x, y)(0, 1) + o(\|(s, t)\|)$$
$$= s \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + o(\|(s, t)\|)$$

Or, d'après les conditions de Cauchy, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Donc

$$f(x+s, y+t) - f(x, y) \underset{s,t \to 0}{=} s \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + it \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(\|(s, t)\|)$$

$$= (s+it)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(|s+it|)$$

Ainsi

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \underset{h\to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Donc f est dérivable en z et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial}(x,y)$, d'où $z \longmapsto f'(z)$ est continue car u et v de classe C^1. Par conséquent f est holomorphe.

2. On a, d'après la question précédente et le lemme de Schwarz sur les dérivées partielles,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

D'où u est harmonique. On montre de même que v est harmonique.

$\square$

Question de cours. Déterminer la dérivée de $B \circ (f,g)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow E, g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ dérivables et $B : E \times F \longrightarrow G$ application bilinéaire avec E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie. Le démontrer.

Réponse. Si f et g sont dérivable alors $B \circ (f,g)$ est dérivables et

$$(B \circ (f,g))' = B \circ (f', g) + B \circ (f, g').$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{B(f(t),g(t)) - B(f(s),g(s))}{t-s} = \frac{B(f(t),g(t)) - B(f(s),g(t)) + B(f(s),g(t)) - B(f(s),g(s))}{t-s}$$

$$= B\left(\frac{f(t)-f(s)}{t-s}, g(t)\right) + B\left(f(s), \frac{g(t)-g(s)}{t-s}\right) \underset{s \to t}{\longrightarrow} B(f'(t),g(t)) + B(f(t),g'(t)),$$

grâce à la continuité de B (bilinéaire en dimension finie) et de f. □

Exercice. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

<u>Indication</u> : On pourra utiliser le changement de variable

$$f(x,t) = F(x+at, x+bt) =: F(u(x,t), v(x,t)).$$

Démonstration. Par règle de la chaîne, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}.$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \times a + \frac{\partial F}{\partial v} \times b.$$

Puis, comme f est de classe C^2 et (u,v) est un C^∞-difféomorphisme, F est de classe C^2 et, par lemme de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

Ainsi l'équation vérifiée par f donne

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

Donc, en choisissant $a = c$ et $b = -c$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0.$$

Ainsi il existe φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$F(u,v) = \varphi(u) + \psi(v).$$

Par conséquent les solutions sont de la forme

$$f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

$\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,
$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \le i,j \le k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$
3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
Indication : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ alors la fonction somme $\phi = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ de différentielle $d\phi = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Démonstration.

1. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors
$$exp(0+H) = exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$$
Avec $I_n = exp(O)$ et $[H \longmapsto H] = id_{M_n(\mathbb{R})}$ linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
De plus, comme $\|\cdot\|$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$, on a
$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H^k\|}{k!} \le \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = e^{\|H\|} - \|H\| - 1$$
Puis par développement limité de l'exponentielle réelle et en manipulant des o matriciels, on obtient que
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \underset{\|H\| \to 0}{=} o(\|H\|)$$
Par conséquent exp est différentiable en 0 et $dexp(0) = id_{M_n(\mathbb{R})}$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \varphi_k(A+H) \underset{\|H\|\to 0}{=} A^k + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

— Pour $k=1$ on a directement

$$\varphi_1(A+H) = A+H \underset{\|H\|\to 0}{=} A+H+o(\|H\|)$$

— On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall H \in M_n(K), (A+H)^{k+1} = (A+H)^k(A+H) = \varphi_k(A+H)(A+H)$$

Donc par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
(A+H)^{k+1} &\underset{\|H\|\to 0}{=} \left(A^k + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|)\right)(A+H) \\
&= A^{k+1} + A^k H + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^{j+1} + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\
&= A^{k+1} + A^k H A^0 + \sum_{\substack{0\leq i\leq k-1, 1\leq j\leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\
&= A^{k+1} + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|)
\end{aligned}$$

avec, comme $\mathbb{R}$ est un anneau commutatif,

$$\left\| \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \right\| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} \left\|A^i H A^j H\right\| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\|^2 = \|H\|^2 k \|A\|^{k-1}$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \underset{\|H\|\to 0}{=} o(\|H\|)$$

Finalement on a bien

$$\mathcal{P}(k+1) : \varphi_{k+1}(A+H) \underset{\|H\|\to 0}{=} A^{k+1} + \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

Ce qui achève la récurrence.

Par conséquent φ_k est différentiable en A de différentielle donnée par

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. Comme $\varphi_0 = I_n$ constante, $d\varphi_0(A) = 0$.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \|d\varphi_k(A)(H)\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \left\|A^i H A^j\right\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\| = k \|A\|^{k-1} \|H\|$$
   Donc $d\varphi_k(A)$ est continue (automatique car linéaire en dimension finie) et sa norme d'opérateur vérifie
$$\|d\varphi_k(A)\| \leq k \|A\|^{k-1}$$
   Par conséquent $\phi_k := \frac{\varphi_k}{k!}$ est également différentiable en A et sa différentielle vérifie
$$\|d\phi_k(A)\| = \frac{\|d\varphi_k(A)\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!}$$
   Ainsi la série d'applications linéaires $\sum d\phi_k$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}))$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$, donc uniformément convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$.
   Or $M_n(\mathbb{R})$ et $L(M_n(\mathbb{R}))$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
   Ainsi, d'après le théorème, la fonction somme $exp = \sum \phi_k$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}), dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$$
$\square$