Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration des relations de comparaison sur un intervalle de la forme $[a, b[\subset \mathbb{R}$.

Réponse. Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux avec g positive au voisinage de b. Soit $R \in \left\{ \underset{b}{=} O, \underset{b}{=} o, \underset{b}{\sim} \right\}$. On suppose $f \ R \ g$. Alors :

1. Si $\int_a^b g(x)dx$ est convergente alors $\int_x^b f(t)dt \ R \ \int_x^b g(t)dt$.
2. Si $\int_a^b g(x)dx$ est divergente alors $\int_a^x f(t)dt \ R \ \int_a^x g(t)dt$.

Démonstration. Démontrons deux des six propriétés :

1. On suppose que $\int_a^b g(x)dx$ est convergente et $f \underset{b}{=} o(g)$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $c \in [a, b[$ tel que
   $$\forall x \in [c, b[, |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| = \varepsilon g(x)$$
   Soit $x \in [c, b[$, comme $\int_x^b g$ est convergente, on a $|f|$ intégrable sur $[x, b[$ et
   $$\int_x^b |f(t)|dt \leq \varepsilon \int_x^b f(t)dt$$
   ce qui montre que $\int_x^b f(t)dt \underset{x \to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.
2. On suppose que $\int_a^b g(x)dx$ est divergente et $f \underset{b}{=} O(g)$.
   Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $c \in [a, b[$ tel que
   $$\forall x \in [c, b[, |f(x)| \leq M g(x)$$
   Donc
   $$\forall x \in [c, b[, \left| \int_c^x f(t)dt \right| \int_c^x |f(t)|dt \leq M \int_c^x g(t)dt$$
   Or $\int_a^b g(t)dt$ est divergente, donc il existe $d \in [c, b[$ tel que $\left|\int_a^c f(t)dt\right| \leq \int_a^d g(t)dt$.
   Ainsi, par relation de Chasles et inégalité triangulaire,
   $$\forall x \in [d, b[, \left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq (M+1) \int_a^x g(t)dt$$
   ce qui montre que $\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{=} 0\left(\int_a^x g(t)dt\right)$

□

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que
$$\int_0^1 f(t)^n dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration. On a par stricte croissance de f

$$\forall x \in [0,1[, 0 = f(0) \leq f(x) < f(1) = 1$$

Donc, pour $x \in [0,1[$, $(f(x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $f(x) \in [0,1[$, d'où

$$f(x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus $f(1)^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par conséquent la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \delta_1$ continue par morceaux.
Puis on a la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f^n \leq 1$$

avec la fonction constante 1 intégrable sur $[0,1]$.
Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \delta_1 = 0$$

□

Exercice. Soit $p, k \in \mathbb{N}$ et $f_{p,k} : x \in]0,1] \longmapsto x^p ln(x)^k$.

1. Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   On note $K_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)dx$.
2. On suppose $k \geq 1$. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n := \int_0^1 (xln(x))^n dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Démonstration.

1. La fonction $f_{p,k}$ est continue sur $]0,1]$ et, par croissance comparée, $f_{p,k}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $]0,1]$.
   Donc $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
2. On a, par intégrations par parties à justifier,
$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$$
3. On montre par récurrence que
$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$
   Ainsi
$$J_n = J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

4. Soit $x \in]0,1]$, alors

$$x^x = e^{xln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xln(x))^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Alors :

(a) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0,1]$.

(b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$.

(c) La fonction somme $\sum f_n : x \longmapsto x^x$ est continue sur $]0,1]$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{|J_n|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.
Donc

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où $\sum \int_0^1 |f_n(x)|dx$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $x \longmapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$, $\sum \int_0^1 f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme.

Réponse. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur I telle que

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
2. La fonction somme $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I.
3. La série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors $\sum f_n$ est intégrable sur I, $\sum \int_I f_n$ converge et

$$\int_I \sum f_n = \sum \int_I f_n$$

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[0,1]$ définie par

$$\forall n \geq 2, \forall x \in [0,1], f_n(x) = \left\{ \begin{array}{rl} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

1. Dessiner le graphe de f_n pour $n \geq 2$.
2. Déterminer $\underset{n\to+\infty}{lim} f_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Déterminer $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_0^1 f_n(x)dx$.
4. Que pouvez-vous en conclure grâce au théorème de convergence dominée ?

Réponse.

1. Il s'agit d'une fonction triangle.
2. Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
4. Comme $1 \neq 0$, d'après la contraposée du théorème de convergence dominée, on peut en conclure que les f_n ne peuvent pas être majorées uniformément en n par une fonction intégrable sur $[0,1]$.

Démonstration.

1.
2. On a $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Et pour $x \in]0,1]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{2}{n} \leq x \leq 1$, donc $\forall n \geq N, f_n(x) = 0$, d'où
   $$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
3. Pour tout $n \geq 2, \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ car il s'agit de l'aire du triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur n. Ainsi $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
4.

$\square$

Exercice. Déterminer un développement asymptotique à trois termes quand $x \longrightarrow +\infty$ de la fonction

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

Réponse.

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{2e^x}{x^3}\right)$$

Démonstration. Soit $x \in [1, +\infty[$.
Par intégrations par parties succesives on a

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \left[\frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t^2}\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt$$

Or, toujours par intégration par partie,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \left[\frac{e^t}{t^3}\right]_1^x + 3\int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt$$

De plus

$$\frac{e^t}{t^4} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^t}{t^3}\right)$$

avec $t \longmapsto \frac{e^t}{t^3}$ non intégrable sur $[1, +\infty[$.
Donc, par théorème d'intégration d'une relation de comparaison,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt\right)$$

Par conséquent

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^x}{x^3} + o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt\right)$$

Donc

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^3}$$

Ainsi, en reprenant la première égalité,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{2e^x}{x^3}\right)$$

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème de convergence dominée.

Réponse. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.
2. Il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$.

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$$

Exercice. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Démonstration. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :

1. Soit $x \in]0,+\infty[$, alors, comme $0 < e^{-x} < 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   D'où la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \longmapsto \frac{x^2}{e^x-1}$ sur $]0,+\infty[$.

2. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{e^x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx$ fini.
   Alors, par intégration par parties à justifier,

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}dx = \left[x^2\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}dx = 0 + \frac{2}{n+1}\int_0^{+\infty} xe^{-(n+1)}dx$$

   Puis, par intégration par parties,

$$\frac{n+1}{2}I_n = \left[x\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}dx = 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

   D'où $I_n = \frac{2}{(n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$.
   Ainsi, comme $3 > 1$ et I_n positif, par théorème de comparaison, $\sum I_n$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, $\sum \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

$\square$

Exercice. On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{sin(x)^2}{x^2} \end{array}, g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{sin(x)}{x\sqrt{x}} \end{array}$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont intégrables sur $[1,+\infty[$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
3. On considère $G : x \in [1,+\infty[\longmapsto \int_x^{+\infty} g(t)dt$. Montrer que
$$G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$
Indication : Commencer par une intégration par partie dans $G(x)$ pour $x \in [1,+\infty[$.
4. On considère $F : x \in [1,+\infty[\longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $K : x \in [1,+\infty[\longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{cos(2t)}{2t^2}dt$. Montrer que
$$\forall x \in [1,+\infty[, F(x) = \frac{1}{2x} - K(x)$$
5. Montrer que
$$K(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2x}\right)$$
6. En déduire que
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \text{ et } G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(F(x))$$
7. On considère $h = f + g$ et $H = F + G$. Montrer que g et h sont équivalents en $+\infty$ mais pas G et H.

Démonstration.

1. On a $f(x), g(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ avec $x \longrightarrow \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\frac{3}{2} > 1$.
Donc f et g sont intégrables sur $[1,+\infty[$.
2. On a
$$\forall x \in [1,+\infty[, f(x) = \frac{sin(x)^2}{x^2} = \frac{sin(x)}{x\sqrt{x}}\frac{sin(x)}{\sqrt{x}} = g(x)\frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$$
avec $\frac{sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
3. Soit $x \in [1,+\infty[$. Par intégration par parties on a
$$G(x) = \int_x^{+\infty} g(t)dt = \int_x^{+\infty} \frac{sin(x)}{x\sqrt{x}}dx = \frac{cos(x)}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\int_x^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^2\sqrt{t}}dt$$
Donc
$$|G(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{t}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}\frac{1}{x}$$
D'où $G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Soit $x \in [1, +\infty[$, alors, par linéarisation de sin^2, on a

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1 - cos(2t)}{t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} - \int_x^{+\infty} \frac{cos(2t)}{t^2} dt = \frac{1}{2x} - K(x)$$

5. Soit $x \in [1, +\infty$, par intégration par parties on a

$$K(x) = -\frac{sin(2x)}{4x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{sin(2t)}{2t^3} dt$$

Donc

$$|K(x)| \leq \frac{1}{4x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^3} dt = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{2x} \frac{1}{x}$$

Ainsi $K(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2x}\right)$.

6. On obtient donc $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{2x}\right)$, d'où $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.
De plus, comme $G(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(F(x))$, on en déduit que

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(F(x))$$

7. On a $h(x) = f(x) + g(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x)) + g(x)$, donc

$$h(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$$

Puis $H(x) = F(x) + G(x) \underset{x \to +\infty}{=} F(x) + o(F(x))$, donc $H(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} F(x)$, d'où

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(H(x))$$

Ainsi les fonctions G et H ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

$\square$