Question de cours. Enoncer et démontrer une caractérisation de la diagonalisabilité en termes de sous-espaces propres et en termes de polynôme caractéristique.

Réponse. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in End(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable.
2. E est somme directe des sous-espaces propres de u.
3. Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

Démonstration.

1. On suppose que u est diagonalisable.
   Alors il existe une base b de E formée de vecteurs propres de u. On réordonne b de la façon suivante :
   $$b = (\underbrace{v_1, ..., v_{n_1}}_{\in E_{\lambda_1}}, ..., \underbrace{w_1, ..., w_{n_p}}_{\in E_{\lambda_p}})$$
   Puis, comme $|b| = dim(E)$, on a $n_1 + ... + n_p = dim(E)$. De plus les sous-espaces propres E_{λ_i} de u sont en somme directe, donc E est somme directe des sous-espaces propres de u.
   Ce qui montre $1 \Longrightarrow 2$.
2. On suppose que E est somme directe des sous-espaces propres de u.
   On suppose par l'absurde que le polynôme caractéristique χ_u n'est pas scindé, donc
   $$\chi_u = Q(X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$
   avec $\alpha_1 + ... + \alpha_k < n$.
   Donc
   $$n = dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_k}) \leq \alpha_1 + ... + \alpha_k < n$$
   ce qui est absurde.
   Donc χ_u est scindé.
   D'autre part on suppose par l'absurde qu'il existe $\lambda_j \in Sp(u)$ tel que $dim(E_{\lambda_k}) < \alpha_j$.
   Alors
   $$n = dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_p}) < \alpha_1 + ... + \alpha_p = n$$
   ce qui est absurde.
   Par conséquent la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, ce qui montre $2 \Longrightarrow 3$.
3. On suppose la propriété 3 vérifié.
   Alors
   $$dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_p}) = \alpha_1 + ... + \alpha_p = n$$
   Donc
   $$E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$$
   ce qui montre $3 \Longrightarrow 2$.

4. On suppose que E est somme directe des sous-espaces propres de u.
   Alors, en choisissant des $b_1, ..., b_p$ de $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$, on a $b = (b_1, ..., b_p)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable, ce qui montre $2 \Longrightarrow 1$.

$\square$

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Démonstration. Le système précédent se réécrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or $\chi_A = (X-2)(X-3)$, donc le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
De plus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X_0$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n & = & -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{array} \right.$$

$\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, montrer que $||| \cdot ||| : A \in M_n(\mathbb{K}) \longmapsto \underset{x\in S(0,1)}{sup} \|Ax\|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$, appelé norme matricielle induite par $\|\cdot\|$.

2. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_\infty$ vérifie

$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

3. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_1$ vérifie

$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

Démonstration.

1. L'application $|||\cdot|||$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $|||A||| = 0$.
   Alors $\forall x \in S(0,1), \|Ax\| = 0$ ie $\forall A \in S(0,1), Ax = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$, alors $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc $A\frac{x}{\|x\|} = 0$ ie $Ax = 0$.
   Par conséquent $A = 0$.
   Puis $|||\cdot|||$ vérifie l'inégalité triangulaire et l'homogénéité car $\|\cdot\|$ les vérifie.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in S_\infty(0,1)$, alors

$$\|Ax\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j\right| \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

   D'où

$$|||A|||_\infty \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

   Puis il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n}|A_{kj}| = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum\limits_{j=1}^{n}|A_{ij}|$.
   On considère alors $x \in \mathbb{K}^n$ défini par

$$\forall j \in [\![1,n]\!], x_j = \begin{cases} \frac{\overline{A_{kj}}}{|A_{kj}|} & \text{si } A_{kj} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Ainsi $x \in S_\infty(0,1)$ et

$$\forall j \in [\![1,n]\!], |(Ax)_j| \leq \|Ax\|_\infty \leq |||A|||_\infty \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

   Avec

$$|(Ax)_k| = \left|\sum_{j=1}^{n}A_{kj}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n}|A_{kj}| = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{kj}|$$

   D'où

$$\|Ax\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

Par conséquent

$$|||A|||_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in S_1(0,1)$, alors

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}| = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

D'où

$$|||A|||_1 \leq \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

Puis il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}|A_{ik}| = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum\limits_{i=1}^{n}|A_{ij}|$.
On considère alors $x = e_k \in \mathbb{K}^n$.
Ainsi $x \in S_1(0,1)$ et

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_{ik}| = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

Par conséquent

$$|||A|||_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

□

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de Bolzanno-Weierstrass en dimension finie. On pourra commencer par énoncer clairement les étapes de la démonstration.

Réponse. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$ bornée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, ie il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration.
On commence par traiter le cas réel : On crée deux suites adjacentes et on utilise le théorème des gendarmes pour conclure.
Puis pour $\mathbb{R}^n$ on extrait coordonnée par coordonnées avec une composée d'extractrices.
Enfin pour le cas complexe, on utilise le fait que $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\square$

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K-espace vectoriel, déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$
Montrer que f est bien définie, K-linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. E vérifie bien les axiomes d'un K-espace vectoriel grâce notamment à la linéarité de l'application trace.
Soit $A \in M_2(K)$, alors
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \Longleftrightarrow a + d = 0 \Longleftrightarrow a = -d$$
Donc
$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$
Ainsi $b = (E_1, E_2, E_3)$ est une famille génératrice de E, de plus il s'agit d'une famille libre, donc (E_1, E_2, E_3) est une base de E, d'où E est de dimension 3.
2. Soit $M \in E$, alors $tr(f(M)) = tr(MB) - tr(BM) = tr(MB) - tr(MB) = 0$, d'où f est bien définie.
L'application f est linéaire par bilinéarité du produit matriciel.
De plus $f(E_1) = -4E_3, f(E_2) = 2E_1 + 2E_2, f(E_3) = -2E_3$.
Donc
$$C := Mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. On détermine χ_C puis on diagonalise C avec les matrices de passage pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1+(-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme $Mat_b(f^n) = C^n$, on obtient

$$f^n(A) = af^n(E_1)+bf^n(E_2)+cf^n(E_3) = 2^n \begin{pmatrix} b & b \\ 2a(-1)^n - b(1+(-1)^n) + c(-1)^n & -b \end{pmatrix}$$

□

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f et g deux endomorphismes diagonalisables qui commutent $f \circ g = g \circ f$.
On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f, $\mu_1, ..., \mu_q$ celles de g, $F_1, ..., F_p$ les sous-espaces propres de f et $G_1, ..., G_q$ ceux de g.

1. Soit $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, montrer que G_j est stable par f et F_i est stable par g.
2. On considère $H_{ij} = F_i \cap G_j$, montrer que $F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{ij}$.
3. En déduire le résultat suivant : il existe une base de vecteurs propres communs à f et g si et seulement si f et g commutent.
4. Montrer que si f et g commutent et sont diagonalisables alors $f+g$ est diagonalisable.

Démonstration.

1. Soit $x \in G_j$, alors $g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(\mu_j x) = \mu_j f(x)$, d'où $f(x) \in G_j$.
   De même F_i est stable par g.
2. Soit $x_i \in F_i$.
   Or g est daigonalisable, donc $E = G_1 \oplus ... \oplus G_q$.
   Ainsi il existe $y_1 \in G_1, ..., y_q \in G_q$ tel que

   $$x_i = y_1 + ... + y_q$$

   Ainsi

   $$\lambda_i y_1 + ... + \lambda_i y_q = \lambda_i x_i = f(x_i) = f(y_1) + ... + f(y_q)$$

   Or pour $j \in [\![1,q]\!]$, $y_j \in G_j$ et G_j est stable par f d'après la question 1, donc $f(y_j) \in G_j$.
   Ainsi, comme les G_j sont en somme directe,

   $$\forall j \in [\![1,q]\!], f(y_j) = \lambda_i y_j$$

   D'où

   $$\forall j \in [\![1,q]\!], y_j \in F_i \cap G_j = H_{ij}$$

   et

   $$x \in H_{i1} + ... + H_{iq}$$

Réciproquement pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $H_{ij} \subset F_i$, donc $H_{i1} + ... + H_{iq} \subset F_i$.
De plus la somme est directe : Soit $x = x_1 + ... + x_q \in H_{i1} + ... + H_{iq}$ tel que

$$x_1 + ... + x_q = 0$$

Alors en particulier

$$\forall j \in [\![1, q]\!], x_j \in H_{ij} \subset G_j$$

Or $E = \bigoplus_{j=1}^{q} G_j$ car g est diagonalisable, donc

$$\forall j \in [\![1, q]\!], x_j = 0$$

Par conséquent

$$F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{ij}$$

3. (a) On suppose que f et g commutent.
On a, d'après ce qui précède,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i,j=1}^{p,q} H_{ij}$$

Soit b une base de E obtenue en concaténant des bases des H_{ij} (ceux qui sont non réduits à $\{0\}$), alors on obtient une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et vecteurs propres de g.

   (b) Réciproquement on suppose qu'il existe une base b de E formée de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g.
Alors, dans cette base, $Mat_b(f)$ et $Mat_b(g)$ commutent, donc f et g commutent.

4. Comme f et g commutent, d'après ce qui précède, il existe une base b de E telle que $Mat_b(f)$ et $Mat_b(g)$ soient diagonales.
Alors $Mat_b(f + g) = Mat_b(f) + Mat_b(g)$ diagonale, d'où $f + g$ est diagonalisable.

□

Question de cours. Enoncer et démontrer une caractérisation de la trigonalisabilité en termes de polynôme caractéristique.

Réponse. Soit $u \in End(E)$ avec E un K-espace vectoriel de dimension finie n, alors u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur K.

Démonstration.

1. On suppose que u est trigonalisable, alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u)$ soit triangulaire supérieure.
   Ainsi, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ la diagonale de $Mat_b(u)$, on obtient
   $$\chi_u = det(XI_n - Mat_b(u)) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$$
   D'où χ_u est scindé sur K.
2. Réciproquement on suppose que χ_u est scindé sur K.
3. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que u est trigonalisable :
   (a) Pour $n = 1$: Il n'y a rien à faire, u est trigonalisable.
   (b) On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ avec $n \geq 2$.
   Comme χ_u est scindé sur K, il admet au moins une valeur propre $\lambda \in K$, donc il existe au moins un vecteur propre $e_1 \in E_\lambda$.
   On complète e_1 en une base $b = (e_1, ..., e_n)$ de E.
   Alors
   $$Mat_b(u) = \begin{pmatrix} \lambda & *** \\ (0) & B \end{pmatrix}$$
   avec $B \in M_{n-1}(K)$.
   Soit $F = Vect(e_2, ..., e_n)$ et $v : F \longrightarrow F$ l'unique endomorphisme de F tel que $Mat_{(e_2,...,e_n)}(v) = B$.
   Alors $\chi_u = (X - \lambda)\chi_v$, donc χ_v est scindé, d'où par hypothèse de récurrence, v est trigonalisable.
   Ainsi il existe une base $(e'_2, ..., e'_n)$ de F telle que $Mat_{(e'_2,...,e'_n)}(v)$ soit triangulaire supérieure, d'où $Mat_{(e_1,e'_2,...,e'_n)}$ est triangulaire supérieure, ce qui montre que u est trigonalisable.

□

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\overline{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\overline{v} \in E_{\overline{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A, ainsi qu'une matrice de passage.

Démonstration.

1. Comme $\lambda \in Sp(A)$ complexe, il existe $v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $Av = \lambda v$.
   Ainsi, comme A est réelle,
   $$\overline{\lambda}\overline{v} = \overline{\lambda v} = \overline{Av} = \overline{A}\overline{v} = A\overline{v}$$
   avec $\overline{v} \neq 0$.
2. On a $\chi_A = X\left(X - \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right) = X\left(X^2 + 3X + 3\right)$.
   Donc
   $$Sp(A) = \{0, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\}$$
   et une matrice de passage est
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} \\ 1 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi
   $$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$
   D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$
   Donc
   $$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$
   Par conséquent
   $$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$
   Donc, d'après le théorème de Bolzanno-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} l$$

Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent, comme φ est croissante,

$$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$.

Le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{Q}$ car par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car convergente dans $\mathbb{R}$ vers e mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. $\square$