Question de cours. Enoncer une caractérisation de la diagonalisabilité en termes de sous-espaces propres.

Réponse. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in End(E)$, alors u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.

Exercice. On considère

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

Démonstration.

1. On montre que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$:
   (a) $E \neq \varnothing$ car $(0) \in E$.
   (b) Soit $\begin{pmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ 2c_1 & -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ 2c_2 & -b_2 \end{pmatrix} \in E$.
   Alors
   $$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ 2c_1 & -b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ 2c_2 & -b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ 2(c_1+c_2) & -(b_1+b_2) \end{pmatrix} \in E$$
   (c) Soit $\begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Alors $\lambda \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b & \lambda c \\ 2\lambda c & -\lambda b \end{pmatrix} \in E$

   D'où E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, en particulier E est un espacce vectoriel.
   Variante : On a $E = Im(f)$ avec $f : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ application linéaire entre deux espaces vectoriels.
2. On montre que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de E libre et génératrice de E.
   Donc $dim(E) = 3$.

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End(E)$. Montrer que les assertions suivantes suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ soit inversible.
2. $E = ker(u) \oplus Im(u)$.

Démonstration.

1. On suppose qu'il $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ soit inversible.
   Soit $y \in Im(v)$: $y \in E$ et il existe $x \in E$ tel que $v(x) = y$, ainsi $u(y) = u \circ v(x) = 0$, d'où
   $$Im(v) \subset ker(u)$$
   Ainsi $rg(v) \subset dim(ker(u)) = n - rg(u)$.
   De plus $n = rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v) \leq n$, d'où les inégalités sont des égalités.
   Ainsi
   $$Im(v) = ker(u) \text{ et } E = Im(u) + Im(v) = Im(u) + ker(u)$$
   car $E = Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$.
   De plus cette somme est directe car
   $$dim(Im(u) \cap Im(v)) = dim(Im(u) + Im(v)) - dim(Im(u)) - dim(Im(v)) = n - rg(u) - rg(v) = 0$$
   Donc $E = Im(u) \oplus ker(u)$.
2. Réciproquement on suppose que $E = ker(u) \oplus Im(u)$.
   Soit v le projecteur sur $ker(u)$ parallèlement à $Im(u)$.
   Alors $u \circ v = 0$.
   Soit $x \in E$ tel que $(u + v)(x) = 0$, alors
   $$u(x) = v(-x) \in Im(u) \cap Im(v) = Im(u) \cap ker(u) = \{0\}$$
   D'où $x = 0$ ce qui montre que $u + v$ est injective puis bijective car il s'agit d'un endomorphisme.

□

Question de cours. Enoncer le théorème du rang et une caractérisation de la bijectivité d'un endomorphisme.

Réponse. Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in L(E, F)$, alors

$$dim(E) = dim(ker(u)) + rg(u)$$

De plus si $E = F$ pour avoir u un endomorphisme, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijectif.
2. u est injectif.
3. u est surjectif.
4. $rg(u) = dim(E)$.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $F \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une base de F.
3. Déterminer les suites de F telles que $u_0 = 1, u_1 = -2$.

Démonstration.

1. On vérifie les axiomes d'un sous-espace vectoriel :
   (a) $F \neq \varnothing$ car la suite nulle appartient à F.
   (b) Soit $u, v \in F$, alors $u + v \in F$.
   (c) Soit $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u \in F$.
2. (a) $a, b \in F$ car ces suites vérifient bien la relation de récurrence.
   (b) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda a + \mu b = 0$.
   Alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 = \lambda a_n + \mu b_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$
   En particulier,
   $$0 = \lambda + \mu, 0 = -\lambda + 2\mu$$
   D'où $\lambda = \mu = 0$, ce qui montre que la famille (a, b) est libre.
   (c) Une suite $u \in F$ est entièrement déterminée par u_0 et u_1.
   On peut donc considère la bijection $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto u \in F$ qui est linéaire, donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
   Par conséquent F est de dimension $2 = card((a, b))$.
   Finalement (a, b) est une base de F.

3. Comme (a, b) est une base de F, (a, b) est en particulier une famille génératrice de F.
   Soit $u \in F$ tel que $u_0 = 1, u_1 = -2$.
   Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$
   En particulier on a
   $$1 = u_0 = \lambda + \mu, -2 = u_1 = -\lambda + 2\mu$$
   D'où $\mu = -\frac{1}{3}, \lambda = \frac{4}{3}$.
   Par conséquent l'unique suite vérifiant $u_0 = 1, u_1 = -2$ est
   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

□

Exercice. On considère $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques (ie ${}^tA = A$) et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques (ie ${}^tA = -A$).

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $S_3(\mathbb{R})$ et de $A_3(\mathbb{R})$.
3. Faire de même pour $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
5. L'égalité précédente est-elle encore vraie pour $M_n(\mathbb{K})$ avec K un corps quelconque ?

Démonstration.

1. $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ car ce sont les images des applications linéaires $A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tA \in M_n(\mathbb{R})$ et $A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto -\,{}^tA \in M_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$, alors il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tel que
   $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$
   Ainsi une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$ est $(e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,2}, e_{2,3}, e_{3,3})$.
   De plus cette famille est libre donc il s'agit d'une base de $S_3(\mathbb{R})$, ainsi $dim(S_3(\mathbb{R})) = 6$.
   De même (comme $2 \neq 0$ dans $\mathbb{R}$) pour $A \in A_3(\mathbb{R})$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$
   Donc une base de $A_3(\mathbb{R})$ est $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ que l'on note $(f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,3})$, puis $dim(A_3(\mathbb{R})) = 3$.

3. Comme précédemment on montre que $(e_{i,j})_{1\leq i\leq j\neq n}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$.
   Donc

$$dim(S_n(\mathbb{R})) = |\{i,j \in [\![1,n]\!], i \leq j\}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{\{i\leq j\}} = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Puis $(f_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ est une base de $A_n(\mathbb{R})$, donc

$$dim(A_n(\mathbb{R})) = |\{i,j \in [\![1,n]\!], i < j\}| = |\{i,j \in [\![1,n]\!], i \leq j\}| - |\{i,j \in [\![1,n]\!], i = j\}|$$

   D'où

$$dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$$

4. On a $dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = dim(S_n(\mathbb{R})) + dim(A_n(\mathbb{R}))$ et

$$S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$$

   D'où $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
5. L'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps car 2 est premier mais dans ce corps $-1 = 1$, donc

$$S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})$$

   D'où $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ ne sont pas en somme directe.

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème de la base adaptée/incomplète.

Réponse. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, ..., x_n)$ une famille de E. Alors :

1. Si $(x_1, ..., x_n)$ engendre E alors il existe une sous-famille de $(x_1, ..., x_n)$ qui est une base de E.
2. Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille libre alors on peut peut compléter $(x_1, ..., x_n)$ en une base de E.

Exercice. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{rcl} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array}$.

1. Montrer que $f \in End(M_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.
4. A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$?

Démonstration.

1. f es tlinéaire par bilinéarité du produit matriciel.
2. Soit $A \in Ker(f)$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et
$$0 = f(A) = AM - MA = \begin{pmatrix} 2c & 2a + 2b - 2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix}$$
Donc $c = 0$ et $a + b = d$.
D'où
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a + b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi $\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $Ker(f)$. De plus il s'agit d'une famille libre, donc d'une base de $Ker(f)$.
3. Soit $B \in Im(f)$: il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que
$$B = f(A) = \begin{pmatrix} 2c & 2a + 2b - 2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = 2c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (2a + 2b - 2d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
De plus il s'agit d'une famille libre, donc d'une base de $Im(f)$.
4. Par le théorème du rang on a $4 = dim(M_2(\mathbb{R})) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 2 + 2$. On a également $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ car pour $A \in Ker(f) \cap Im(f)$, d'après ce qui précède, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que
$$aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & c \\ b & = & d \\ 0 & = & -c \\ a+b & = & c \end{array}\right.$, d'où $a=b=c=d0$, puis $A=0$.
Par conséquent on a $M_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$.

$\square$

Exercice. Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f \in L(E,F)$ et $g \in L(E,G)$.
   Montrer qu'il existe $h \in L(F,G)$ tel que $g = h \circ f$ si et seulement si $ker(f) \subset ker(g)$.
2. Soit $g \in L(E,G)$ et $h \in L(F,G)$.
   Montrer qu'il existe $f \in L(E,F)$ tel que $g = h \circ f$ si et seulement si $Im(g) \subset Im(h)$.

Démonstration.

1. (a) On suppose que qu'il existe $h \in L(F,G)$ tel que $g = h \circ g$.
   Soit $x \in ker(f)$: $x \in E$ et $f(x) = 0$.
   Alors $g(x) = h(f(x)) = h(0) = 0$, d'où $x \in ker(g)$.
   Ainsi $ker(f) \subset ker(g)$.

   (b) Réciproquement on suppose que $ker(f) \subset ker(g)$.
   On considère l'application :
   $$h' : \begin{array}{rcl} Im(f) & \longrightarrow & G \\ y = f(x) & \longmapsto & g(x) \end{array}$$
   Cette application est bien définie car pour $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, on a $x - x' \in ker(f) \subset ker(g)$, d'où $g(x) = g(x')$.
   Cette application est bien linéaire.
   On a également $g = h' \circ f$.
   Puis on considère $h \in L(F,G)$ tel que $h_{|Im(f)} = h'$, ainsi $g = h \circ f$.

2. (a) On suppose qu'il existe $f \in L(E,F)$ tel que $g = h \circ f$.
   Soit $y \in Im(g)$: $y \in G$ et il existe $x \in E$ tel que $g(x) = y$.
   Ainsi $y = h(f(x)) \in Im(h)$, d'où $Im(g) \subset Im(h)$.

   (b) Réciproquement on suppose que $Im(g) \subset Im(h)$.
   On considère F' un supplémentaire de $ker(h)$ dans F et
   $$h' : \begin{array}{rcl} F' & \longrightarrow & Im(h) \\ y & \longmapsto & h(y) \end{array}$$
   Ainsi h' est un isomorphisme d'espaces vectoriels (surjectif par définition de $Im(h)$ et injectif car F' supplémentaire de $ker(h)$ dans F).
   On peut donc considérer $k = h'^{-1} \in L(Im(h), F')$ et $f = k \circ g \in\subset L(E,F)$ (bien définie car $Im(g) \subset Im(h)$).
   Ainsi
   $$\forall x \in E, h \circ f(x) = h(k(g(x))) = g(x)$$
   D'où $h \circ f = g$.

$\square$