Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(ax+b) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(a^n x + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)$$

Ainsi, comme $|a| \neq 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f\left(a^n x + b\frac{a^n - 1}{a-1}\right) = f(x)$$

Distinguons deux cas :

1. Si $|a| < 1$ alors, par continuité de f et passage à la limite, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$$

   Donc f est constante.
2. Si $|a| > 1$ alors, en faisant le changement de variable $t = ax + b$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f\left(\frac{1}{a}t - \frac{b}{a}\right)$$

   avec $\frac{1}{|a|} < 1$, donc, d'après ce qui précède, f est constante

□

Exercice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{cos(x)}{x}$.
   Montrer que f admet un unique extremum dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$ en un point x_n.
2. Donner un équivalent asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} an + b + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. En déduire un équivalent de $f(x_n)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration.

1. La fonction f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-sin(x)x - cos(x)}{x^2} = -\frac{cos(x)}{x}\left(tan(x) + \frac{1}{x}\right) =: -\frac{cos(x)}{x}h(x)$$

Or h est dérivable et

$$\forall x > 1, h'(x) = \frac{1}{cos(x)^2} - \frac{1}{x^2} > 0$$

Donc h est strictement croissante, en particulier sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$ vers $\left]-\infty, \frac{1}{n\pi}\right]$, donc est une bijection entre ces deux ensembles.
Ainsi il existe il existe un unique $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$ tel que $f'(x_n) = 0$.
De plus h est strictement croissante, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante et cos strictement monotone sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$, donc f' est strictement monotone, d'où x_n est un extremum de f.

2. On a $f'(x_n) = 0$ et $cos(x_n) \neq 0$, donc $tan(x_n) = -\frac{1}{x_n}$, ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x_n = k\pi - arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

avec $-arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ car $x_n > 0$, et $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$, d'où $k = n$.
Ainsi

$$x_n = n\pi - arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$, puis

$$x_n = n\pi - arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\pi - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On a donc

$$f(x_n) = \frac{cos(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

□

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Démonstration. Le système précédent se réécrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or $\chi_A = (X-2)(X-3)$, donc le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
De plus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X_0$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n & = & -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{array} \right.$$

$\square$

Exercice.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx} \underset{x\to+\infty}{=} e\left(1-\frac{1}{2kx}+\frac{11}{24k^2x^2}+o(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^2\left(a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + b\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + c\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

1. On a

$$\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx} = exp\left(kxln\left(1+\frac{1}{kx}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} exp\left(kx\left(\frac{1}{kx}-\frac{1}{2k^2x^2}+\frac{1}{3k^3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)$$

Puis

$$\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx} \underset{x\to+\infty}{=} exp\left(1-\frac{1}{2kx}+\frac{1}{3k^2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = e\left(1-\frac{1}{2kx}+\frac{1}{3k^2x^2}+\frac{1}{8k^2x^2}+o(\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où

$$\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx} \underset{x\to+\infty}{=} e\left(1-\frac{1}{2kx}+\frac{11}{24k^2x^2}+o(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. Ainsi, grâce à ce qui précède, on a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} e\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma+o(1)\right)$$

avec $\alpha = a+b+c, \beta = -\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)$ et $\gamma = \frac{11}{24}\left(a+\frac{b}{4}+\frac{c}{9}\right)$.
Donc

$$\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \text{ ou}(\alpha = 0 \text{ et } \beta > 0) \\ -\infty & \text{si } \alpha > 0 \text{ ou}(\alpha = 0 \text{ et } \beta > 0) \\ e\gamma & \text{si } \alpha = \beta = 0 \end{cases}$$

□

Exercice.

1. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 et $f(0) = 0$.
Montrer que

$$\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)\right) = f'(0)ln(2)$$

2. Montrer que

$$\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right) = 0$$

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Alors, par dérivabilité de f en 0, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [0,1], |x-0| \leq \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - f'(0) \right| \leq \varepsilon$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq \frac{1}{\delta}$, et $k \in [\![1,n]\!]$, alors $0 < \frac{1}{n+k} < \delta$, donc

$$\left| \frac{f\left(\frac{1}{n+k}\right)}{\frac{1}{n+k}} - f'(0) \right| \leq \varepsilon$$

   ie

$$\left| f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} f(0) \right| \leq \frac{1}{n+k}\varepsilon$$

   D'où, par sommation et inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k+n}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right) f'(0) \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right) \varepsilon \leq \varepsilon$$

   Puis, par somme de Riemann,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = ln(2)$$

   D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \right) = f'(0) ln(2)$$

2. On applique ce qui précède avec $f(x) = x^2$ car $f'(0) = 0$.

□

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K-espace vectoriel, déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

   Montrer que f est bien définie, K-linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. E vérifie bien les axiomes d'un K-espace vectoriel grâce notamment à la linéarité de l'application trace.
   Soit $A \in M_2(K)$, alors
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \Longleftrightarrow a + d = 0 \Longleftrightarrow a = -d$$
   Donc
   $$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$
   Ainsi $b = (E_1, E_2, E_3)$ est une famille génératrice de E, de plus il s'agit d'une famille libre, donc (E_1, E_2, E_3) est une base de E, d'où E est de dimension 3.
2. Soit $M \in E$, alors $tr(f(M)) = tr(MB) - tr(BM) = tr(MB) - tr(MB) = 0$, d'où f est bien définie.
   L'application f est linéaire par bilinéarité du produit matriciel.
   De plus $f(E_1) = -4E_3, f(E_2) = 2E_1 + 2E_2, f(E_3) = -2E_3$.
   Donc
   $$C := Mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
3. On détermine χ_C puis on diagonalise C avec les matrices de passage pour obtenir
   $$\forall n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1 + (-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$
   Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme $Mat_b(f^n) = C^n$, on obtient
   $$f^n(A) = af^n(E_1) + bf^n(E_2) + cf^n(E_3) = 2^n \begin{pmatrix} b & b \\ 2a(-1)^n - b(1 + (-1)^n) + c(-1)^n & -b \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice. Soit $f \in C^3([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que

$$-\frac{\lambda}{n^4} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\lambda}{n^4}$$

2. Montrer que

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

3. Montrer que

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}(f(1)-f(0)) + \frac{1}{12n^2}(f'(1)-f'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Démonstration.

1. Soit $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que

$$f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 f'''(c_k)$$

Donc

$$-\frac{\lambda}{n^3} \leq f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\underset{[0,1]}{sup}|f'''|}{6n^3} =: \frac{\lambda}{n^3}$$

D'où, par intégration entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$,

$$-\frac{\lambda}{n^4} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\lambda}{n^4}$$

2. Puis en sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\left|\int_0^1 f(t)dt - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leq \frac{\lambda}{n^3} = f(1)-f(0)-\frac{1}{2n}S_n(f'')+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ie

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

3. De même
$$S_n(f') \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f'(t)dt - \frac{1}{2n}S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Et
$$S_n(f'') \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f''(t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = f'(1) - f'(0) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
Par conséquent
$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}(f(1)-f(0)) + \frac{1}{12n^2}(f'(1)-f'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in N, u_{n+1} = sin(u_n), u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors, par continuité de sin, $sin(l) = l$. Or la fonction sin admet un unique point fixe en 0 (ce qu'on justifie par l'étude de la fonction $x \longmapsto x - sin(x)$), d'où nécessairement $l = 0$.
La fonction sin est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = sin(u_n) \in [-1,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
En effet on a par récurrence que pour tout $n, N \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n$ et $u_{N+1} - u_N$ sont de même signe.
Par conséquent, par monotonie et bornitude, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. □

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\overline{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\overline{v} \in E_{\overline{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A, ainsi qu'une matrice de passage.

Démonstration.

1. Comme $\lambda \in Sp(A)$ complexe, il existe $v \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ tel que $Av = \lambda v$.
Ainsi, comme A est réelle,
$$\overline{\lambda}\overline{v} = \overline{\lambda v} = \overline{Av} = \overline{A}\overline{v} = A\overline{v}$$
avec $\overline{v} \neq 0$.
2. On a $\chi_A = X\left(X - \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right) = X\left(X^2+3X+3\right)$.
Donc
$$Sp(A) = \left\{0, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

et, après calcul et utilisation de la question précédente, une matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} \\ 1 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\square$