Question de cours. Enoncer le théorème de dérivation d'une limite de fonctions.

Réponse. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une application f et telle que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.
Alors f est dérivable et

$$\forall x \in I, f'(x) = \lim_{n\to+\infty}(f'_n(x))$$

Exercice. Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$. On définit la transposée de f par

$$ {}^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

1. Montrer que ${}^t f \in L(F^*, E^*)$.
2. Vérifier les relations suivantes :
   (a) Soit $g \in L(E,F)$, ${}^t(f+g) ={}^t f +{}^t g$.
   (b) Soit $\lambda \in K$, ${}^t(\lambda f) = \lambda({}^t f)$.
   (c) Soit $g \in L(F,E)$, ${}^t(f\circ g) = {}^t g \circ {}^t f$.
   (d) ${}^t({}^t f) = f$ en utilisant l'identification par isomorphisme canoncique $E \simeq E^* *$.
   (e) Si f est bijective alors ${}^t f$ est aussi bijective et ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$.
3. On suppose E et F de dimension finie. Soit b une base de E et b' une base de F, b^* la base duale de b et b'^* la base duale de b'. Montrer que

$$Mat_{b'^*,b^*}({}^t f) = {}^t Mat_{b,b'}(f)$$

Démonstration.

1. On a ${}^t f$ bien à valeurs dans E^* et linéaire par bilinéarité de la composition.
2. (a) Soit $\varphi \in F^*$, alors

$${}^t(f+g)(\varphi) = \varphi\circ(f+g) = \varphi\circ f + \varphi\circ g = {}^t f(\varphi) + {}^t g(\varphi) = ({}^t f + {}^t g)(\varphi)$$

   (b) Soit $\varphi \in F^*$, alors

$${}^t(\lambda f)(\varphi) = \varphi\circ(\lambda f) = \lambda(\varphi\circ f) = \lambda {}^t f(\varphi)$$

   (c) Soit $\varphi \in F^*$, alors

$${}^t(f\circ g)(\varphi) = \varphi\circ(f\circ g) = (\varphi\circ f)\circ g = {}^t g(\varphi\circ f) = {}^t g({}^t f(\varphi)) = ({}^t f \circ {}^t g)(\varphi)$$

   (d) On a, d'après la question 1, ${}^t({}^t f) \in L(E^{**}, F^{**}) \simeq L(E,F)$ avec les isomorphismes canoniques $E \longrightarrow E^{**}$ et $F \longrightarrow F^{**}$.
   Soit $x \in E$, alors ${}^t({}^t f)(x) = {}^t({}^t f)(\psi_x)$ avec $\psi_x : \varphi \in E^* \longmapsto \varphi(x) \in K$.
   Donc

$${}^t({}^t f)(x) = \psi_x \circ {}^t f$$

   Ainsi, pour tout $\varphi \in F^*$,

$${}^t({}^t f)(x)(\varphi) = (\psi_x \circ {}^t f)(\varphi) = \psi_x(\varphi\circ f) = \varphi(f(x)) = \psi_{f(x)}(\varphi)$$

   D'où ${}^t({}^t f)(x) = \psi_{f(x)} = f(x)$ puis ${}^t({}^t f) = f$.*

(e) On a ${}^t id_E = id_{F^*}$ et ${}^t id_F = id_{E^*}$, donc, en appliquer (c) avec f et f^{-1},

$${}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = {}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t id_F = id_{E^*}$$

Et

$${}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t id_E = id_{F^*}$$

Donc ${}^t f$ est inversible et $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$.

3. On note $Mat_{b,b'}(f) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $Mat_{b'^*,b^*}({}^t f) = (c_{ji})_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n}$.
Alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b'_j$$

et

$$\forall j \in [\![1, m]\!], ({}^t f)(b'^*_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} b^*_i$$

Donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!], (b'^*_j \circ f)(b_i) = \sum_{j'=1}^{m} a_{ij'} b'^*_j(b_{j'}) = a_{ij}$$

Et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!], (b'^*_j \circ f)(b_i) = {}^t f(b'^*_j)(b_i) = \sum_{i'=1}^{n} c_{ji'} b^*_{i'}(b_i) = c_{ji}$$

D'où

$$Mat_{b'^*,b^*}({}^t f) = {}^t Mat_{b,b'}(f)$$

□

Exercice. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et toutes k-lipschiziennes, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la convergence est uniforme.

Démonstration. On a donc par hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in [a, b], |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, par convergence simple, on obtient que f est k-lipschizienne.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à ε.
Soit $x \in [a, b]$, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|$$

Puis, par k-lipschiziennité,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2k|x - a_i| + |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq 2k\varepsilon + |f_n(a_i) - f(a_i)|$$

Or pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $f_n(a_i) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a_i)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall n \geq N, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq 2k\varepsilon + \varepsilon$$

Par conséquent

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq (2k+1)\varepsilon$$

ce qui montre bien que la convergence est uniforme. $\square$

Question de cours. Enoncer le théorème d'interversion des limites (ou de la double limite).

Réponse. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une application f.
Soit $a \in \overline{I}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b_n \in \mathbb{R}$$

Alors $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, autrement dit

$$\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\underset{x\to a}{lim}(f_n(x))\right) = \underset{x\to a}{lim}\left(\underset{a\to+\infty}{lim}(f_n(x))\right)$$

Exercice. Montrer que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$$

Déterminer la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Démonstration. On a $dim((\mathbb{R}^3)^*) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc il suffit de montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une famille libre de $(\mathbb{R}^3)^*$ pour montrer qu'il s'agit d'une base.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda_1(x_1 + 2x_2 + x_3) + \lambda_2(2x_1 + 3x_2 + 2x_3) + \lambda_3(3x_1 + 7x_2 + x_3) = 0$$

ie

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x_1 + (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3)x_2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)x_3 = 0$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, après résolution par la méthode du pivot de Gauss, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui montre que la famille est libre.
Puis on note (b_1, b_2, b_3) la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$:

$$\forall i, j \in [\![1, 3]\!], \varphi_i(b_j) = \delta_{ij}$$

Par exemple, pour $j = 1$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{1,1} + 2b_{1,2} + b_{1,3} & = & 1 \\ 2b_{1,1} + 3b_{1,2} + 3b_{1,3} & = & 0 \\ 3b_{1,1} + 7b_{1,2} + b_{1,3} & = & 0 \end{array}\right.$$

On trouve alors, par la méthode du pivot de Gauss,

$$b_1 = {}^t(-18, 7, 5)$$

Puis, de même, $b_2 = {}^t(5, -2, -1), b_3 = {}^t(3, -1, -1)$. $\square$

Exercice. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & si \quad x \in [0,n] \\ 0 & si \quad x > n \end{cases}$$

Démonstration. Calculons d'abord la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Or $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, x \in [0,n]$$

Donc

$$\forall n \geq N, f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = exp\left(nln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$$

D'où, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$f_n(x) \underset{n\to+}{\longrightarrow} exp(-x) =: f(x)$$

ce qui montre la convergence simple.
Pour la convergence uniforme, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons

$$\varphi_n : x \in [0,n] \longmapsto e^{-x} - f_n(x) \in \mathbb{R}$$

Alors φ est dérivable et

$$\forall x \in [0,n], \varphi_n'(x) = -e^{-x} + \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^{-x}\left(-1 + exp\left((n-1)ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+x\right)\right)$$

Ainsi le signe de φ_n' est donc celui de $\psi_n(x) = (n-1)ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$ qui est une fonction dérivable sur $[0,n[$ et

$$\forall x \in [0,n[, \psi_n'(x) = \frac{1-x}{n-x}$$

Ainsi ψ_n croît sur $[0,1]$ et décroît sur $]1,n[$.
Or $\psi_n(0) = 0$ et $\psi_n(x) \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc il existe $\alpha \in \,]1,n[$ tel que

$$\forall x \in [0,\alpha], \psi_n(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha,n[, \psi_n(x) \leq 0$$

Par conséquent φ_n est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha,n]$.
Or $\varphi_n(0) = 0$ et $\varphi_n(n) = e^{-n} \geq 0$, donc

$$\forall x \in [0,n], 0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(\alpha)$$

Ainsi φ_n admet un maximum en $\alpha \in]0,n[$, donc $\varphi_n'(\alpha) = 0$ ie

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1} = e^{-\alpha}$$

Donc

$$\varphi_n(\alpha) = e^{-\alpha} - \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = e^{-\alpha} - e^{-\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha}{n}e^{-n}$$

Or $x \longmapsto xe^{-x}$ atteint son maximum en $x = 1$, donc

$$\varphi_n(\alpha) \leq \frac{e^{-1}}{n}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x \in [0, n] \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| = |\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{en}$$

et

$$x > n \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$$

Par conséquent

$$\|f_n - f\|_\infty \leq max(\frac{1}{en}, e^{-n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f. $\square$

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que E et E^* sont isomorphes.

Démonstration. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Pour $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in E$, on note $\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \end{array}$, puis on considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}$$

Alors φ est bien à valeurs dans E^*, linéaire.
De plus pour $a \in E$ tel que $\varphi_a = \varphi(a) = 0$, on a

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0$$

En particulier pour les e_j, $1 \leq j \leq n$, on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} a_i = a_j$$

D'où $a = 0$ et φ est injective.
Puis pour $\psi \in E^*$, on note $a_j = \psi(e_j)$, $1 \leq j \leq n$. Ainsi

$$\forall x \in E, \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(e_i) = \varphi_a(x)$$

D'où $\varphi(a) = \psi$ et φ est surjective.
Par conséquent φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où E et E^* sont isomorphes. □

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Déterminer la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Etudier la dérivabilité de la limite.
3. Que peut-on en conclure grâce au théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions ?

Démonstration.

1. La suite de fonctions converge simplement vers $f(x) = |x|$.
   De plus on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n}$$

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
ce qui montre que la convergence est uniforme.

2. La fonction f est n'est pas dérivable en 0.
3. Les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ mais la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

□

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0,1[$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément dans le disque unité ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démonstration.

1. Soit $z \in \overline{D}(0,a)$.
   On a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z) - f(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   car $1 = |1-z+z| \leq |1-z| + |z| \leq |1-z| + a$ et $a \in [0,1[$.
   Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a)$.
2. Soit $z \in D(0,1)$, alors, d'après ce qui précède
   $$f_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$$
   Mais, pour $x \in]-1,1[$,
   $$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$$
   Ainsi on ne peut pas avoir convergence uniforme.

□