Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Le démontrer.

Exercice. Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice. On considère $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$ et pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) := |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Montrer que N est une application à valeurs dans $\mathbb{N}$ et multiplicative.
3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
4. Montrer que N est un stathme sur $\mathbb{Z}[i]$, ie une application de $\mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $w \in \mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z = qw + r$ et $N(r) < N(w)$ ou $r = 0$.

Exercice. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Pour K un corps, de quelle forme sont les idéaux de $K[X]$? Le démontrer.

Exercice. Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

1. Soit $x \in G$, montrer que x est d'ordre fini.
2. Montrer que G est fini.
   Indication : Considérer E l'ensemble des sous-groupes de G et F l'ensemble des sous-groupes monogènes de G.

Exercice. On considère $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exercice. Montrer qu'il existe $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue tel que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$ et que $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration des relations de comparaison sur un intervalle de la forme $[a, b[\subset \mathbb{R}$.
Démontrer les cas suivants :

1. $\int_a^b g(x)dx$ convergente et $f \overset{b}{=} o(g)$.
2. $\int_a^b g(x)dx$ divergente et $f \overset{b}{=} O(g)$.

Exercice. Soit G un groupe abélien fini (dont la loi est notée multiplicativement).

1. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b premiers entre eux, montrer que xy est d'ordre ab.
2. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b, montrer que xy est d'ordre $\text{ppcm}(a, b)$.
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que l'ordre de z soit le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G.
4. En déduire que pour K un corps et G un sous-groupe fini de $K^\times$, G est cyclique.

Exercice. On dit qu'un anneau A est principal si pour tout idéal I de A, il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$.
Citer deux anneaux principaux.
Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.
Indication : Considérer l'idéal $\langle 2, X \rangle$.

Exercice. Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tel que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in [0, 1[$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche