Question de cours. Enoncer le théorème de continuité sous le signe somme.

Réponse. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout compact de I).

Alors la fonction somme $\sum f_n$ est continue sur I.

Exercice. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Démonstration. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :

1. Soit $x \in]0,+\infty[$, alors, comme $0 < e^{-x} < 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   D'où la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \longmapsto \frac{x^2}{e^x-1}$ sur $]0,+\infty[$.

2. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{e^x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx$ fini.
   Alors, par intégration par parties à justifier,

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}dx = \left[x^2\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}dx = 0 + \frac{2}{n+1}\int_0^{+\infty} xe^{-(n+1)}dx$$

   Puis, par intégration par parties,

$$\frac{n+1}{2}I_n = \left[x\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}dx = 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

   D'où $I_n = \frac{2}{(n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$.
   Ainsi, comme $3 > 1$ et I_n positif, par théorème de comparaison, $\sum I_n$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, $\sum \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

$\square$

Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Démonstration. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $f_n' : x \longmapsto -ln(n)\frac{1}{n^x}$.
2. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum \frac{1}{n^x}$ converge comme somme de Riemann avec $x > 1$.
3. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall x \in [a, b], |f_n'(x)| = ln(n)\frac{1}{n^x} \leq ln(n)\frac{1}{n^a}$$

avec $\sum ln(n)\frac{1}{n^a}$ convergente par croissance comparée.
Donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, donc uniformément.

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le sigme somme, $\zeta = \sum f_n$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $\zeta' : x \longmapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} ln(n)\frac{1}{n^x}$ □

Exercice. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & si \quad x \in [0, n] \\ 0 & si \quad x > n \end{cases}$$

Démonstration. Calculons d'abord la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Or $n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, x \in [0, n]$$

Donc

$$\forall n \geq N, f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = exp\left(nln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$$

D'où, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$f_n(x) \underset{n \to +}{\longrightarrow} exp(-x) =: f(x)$$

ce qui montre la convergence simple.
Pour la convergence uniforme, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons

$$\varphi_n : x \in [0, n] \longmapsto e^{-x} - f_n(x) \in \mathbb{R}$$

Alors φ est dérivable et

$$\forall x \in [0, n], \varphi_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^{-x}\left(-1 + exp\left((n-1)ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x\right)\right)$$

Ainsi le signe de φ_n' est donc celui de $\psi_n(x) = (n-1)ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$ qui est une fonction dérivable sur $[0, n[$ et

$$\forall x \in [0, n[, \psi_n'(x) = \frac{1 - x}{n - x}$$

Ainsi ψ_n croît sur $[0,1]$ et décroît sur $]1,n[$.
Or $\psi_n(0)=0$ et $\psi_n(x) \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc il existe $\alpha \in\ ]1,n[$ tel que

$$\forall x \in [0,\alpha], \psi_n(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, n[, \psi_n(x) \leq 0$$

Par conséquent φ_n est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, n]$.
Or $\varphi_n(0)=0$ et $\varphi_n(n)=e^{-n} \geq 0$, donc

$$\forall x \in [0,n], 0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(\alpha)$$

Ainsi φ_n admet un maximum en $\alpha \in]0,n[$, donc $\varphi_n'(\alpha)=0$ ie

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1} = e^{-\alpha}$$

Donc

$$\varphi_n(\alpha) = e^{-\alpha} - \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = e^{-\alpha} - e^{-\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha}{n}e^{-n}$$

Or $x \longmapsto xe^{-x}$ atteint son maximum en $x=1$, donc

$$\varphi_n(\alpha) \leq \frac{e^{-1}}{n}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x \in [0,n] \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| = |\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{en}$$

et

$$x > n \longrightarrow |f_n(x)-f(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$$

Par conséquent

$$\|f_n - f\|_\infty \leq max\left(\frac{1}{en}, e^{-n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f. $\square$

Question de cours. Enconcer le théorème de dérivation sous le signe somme.

Réponse. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur I.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
3. La série de fonctions dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur I ou sur tout compact $[a,b] \subset I$.

Alors la fonction somme $\sum f_n$ est dérivable sur I de fonction dérivée $\sum f_n'$.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0,1[$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément dans le disque unité ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démonstration.

1. Soit $z \in \overline{D}(0,a)$.
   On a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z) - f(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   car $a \in [0,1[$.
   Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a)$.
2. Soit $z \in D(0,1)$, alors, d'après ce qui précède
   $$f_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$$
   Mais, pour $x \in\,]-1,1[$,
   $$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x) - f(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x|^k = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$
   En particulier, pour $x_m = 1 - \frac{1}{m} \in D(0,1)$, on a
   $$\|f - f_n\|_\infty \geq \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)} = m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   Ainsi on ne peut pas avoir convergence uniforme.

$\square$

Exercice. Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$ et $f_{p,k} : x \in\,]0,1] \longmapsto x^p ln(x)^k$.

1. Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   On note $K_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)dx$.
2. On suppose $k \geq 1$. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n := \int_0^1 (xln(x))^n dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Démonstration.

1. La fonction $f_{p,k}$ est continue sur $]0,1]$ et, par croissance comparée, $f_{p,k}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $]0,1]$.
   Donc $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
2. On a, par intégrations par parties à justifier,

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$$

3. On montre par récurrence que

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

   Ainsi

$$J_n = J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

4. Soit $x \in]0,1]$, alors

$$x^x = e^{xln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xln(x))^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   Alors :
   (a) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0,1]$.
   (b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$.
   (c) La fonction somme $\sum f_n : x \longmapsto x^x$ est continue sur $]0,1]$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{|J_n|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.
   Donc

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   D'où $\sum \int_0^1 |f_n(x)|dx$ est convergente.

   Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $x \longmapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$, $\sum \int_0^1 f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$\square$

Exercice. On considére la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
   (a) Si $x < 0$ alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
   (b) Si $x \geq 0$ alors $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée tel que $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant.
   Donc, par critère des séries alternées, $\sum f_n(x)$ est convergente.

   Par conséquent $\Delta = \mathbb{R}_+$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par critère des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

   D'où R_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus tous les f_n sont continues, donc, par théorème de continuité sous le signe somme, $f = \sum f_n$ est continue.

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration d'une fonction somme.

Réponse. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |f_n(x)|dx < +\infty$.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
4. La fonction somme $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I.
5. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)|dx < +\infty$.

Alors, en notant S la fonction somme de $\sum f_n$, :

1. $\int_I |S(x)|dx < +\infty$.
2. $\int_I |S(x)|dx \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|dx$.
3. $\int_I S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx$.

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et toutes k-lipschiziennes, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la convergence est uniforme.

Démonstration. On a donc par hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in [a, b], |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, par convergence simple, on obtient que f est k-lipschizienne.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à ε.
Soit $x \in [a, b]$, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|$$

Puis, par k-lipschiziennité,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2k|x - a_i| + |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq 2k\varepsilon + |f_n(a_i) - f(a_i)|$$

Or pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $f_n(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a_i)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall n \geq N, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq 2k\varepsilon + \varepsilon$$

Par conséquent

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq (2k + 1)\varepsilon$$

ce qui montre bien que la convergence est uniforme. □

Exercice. Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

$$\sum f_n = \sum (arctan(x+n) - arctan(n))$$

sur $\mathbb{R}$ puis sur tout invervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Indication : On rappelle l'identité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^*, arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Démonstration.

1. Pour la convergence simple sur $\mathbb{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq Ent(x)$, alors

$$arctan(n) = \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$arctan(x+n) = \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{1}{x+n}\right) = \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

D'où

$$arctan(x+n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, par théorème de comparaison des séries de termes positifs, $\sum f_n(x)$ est convergente, ie $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

2. Pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$: On note R_n le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.
En particulier

$$R_n(-n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (arctan(-n+k) - arctan(k))$$

Ainsi

$$|R_n(-n)| = -R_n(-n) \geq arctan(n+1) - arctan(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - arctan(1) > 0$$

D'où $\|R_n\|_\infty (\geq |R_n(-n)|)$ ne converge pas vers 0, ce qui montre que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Pour la convergence normale sur $\mathbb{R}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$f_n(x) = arctan(x+n) - arctan(n) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - arctan(n)$$

Donc

$$\|f_n\|_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|f_n(x)| \geq \frac{\pi}{2} + arctan(n) \geq \frac{\pi}{2}$$

Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge, ce qui montre qu'il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
<u>Variante</u> : Comme il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.

4. Pour la convergence normale sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, alors f_n est dérivable en x et
$$f_n'(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2} > 0$$
Ainsi f_n est croissante sur $[a,b]$, donc son minimum est atteint en a et son maximum en b.
Donc, en faisant attention au signe de f_n, on obtient
$$\forall x \in [a,b], |f_n(x)| \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$$
D'où
$$\|f_n\|_{\underset{[a,b]}{\infty}} \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$$
Or, d'après la convergence simple, $\sum |f_n(a)|$ et $\sum |f_n(b)|$ sont convergentes, donc, par comparaison, $\sum \|f_n\|_{\underset{[a,b]}{\infty}}$ également, ce qui montre la convergence normale sur $[a,b]$, donc la convergence uniforme sur $[a,b]$.

$\square$