Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries réels de termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Comment se comportent les séries associées ? Le démontrer. Que peut-on dire des restes et des sommes partielles en cas de convergence ou de divergence ? Démontrer le cas de convergence.

Exercice. Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}}, v_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, w_n = e^{-\sqrt{2+n}}, x_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \frac{S_0 + ... + S_n}{n}$$

1. Montrer que si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro.
2. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\sum u_n$ ne converge pas et que $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Énoncer et démontrer le critère des séries alternées.

Exercice. Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$$

Exercice. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que R_n est bien défini.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Déterminer un équivalent de R_n.
4. Donner la nature de la série $\sum R_n$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que si $\sum |u_n|$ est une série convergente alors $\sum u_n$ est une série convergente.

Exercice. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$$

Exercice. On considère l'application continue

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |sin(2\pi x)| \end{array}$$

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.
2. Montrer que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. Quelle hypothèse sur f manque-t-il pour appliquer le théorème de comparaison série-intégrale ?

Exercice. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. Montrer que $\sum v_n$ est une série convergente.
3. Montrer que $\sum u_n$ est une série divergente.
4. Pourquoi les réponses aux questions précédentes ne mettent pas en défaut le théorème concernant les séries dont les termes sont équivalents ?

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche