Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries réels de termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Comment se comportent les séries associées ? Le démontrer. Que peut-on dire des restes et des sommes partielles en cas de convergence ou de divergence ? Démontrer le cas de convergence.

Exercice. Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $(x^{kl})_{k,l\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$
avec $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \frac{S_1 + ... + S_n}{n}$$

1. Montrer que si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro.
2. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\sum u_n$ ne converge pas et que $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Énoncer et démontrer le critère des séries alternées.

Exercice. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{a^m+b^n}\right)_{m,n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $a > 1, b > 1$.

Exercice. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que R_n est bien défini.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Déterminer un équivalent de R_n.
4. Donner la nature de la série $\sum R_n$.

Exercice. Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que si $\sum |u_n|$ est une série convergente alors $\sum u_n$ est une série convergente.

Exercice. On note $l^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommables et on définit la norme $\|\cdot\|$ sur $l^1(\mathbb{Z})$ par $\|u\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$.

1. Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On définit $(u * v)_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u * v \in l^1(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que $\|u * v\| \leq \|u\| \, \|v\|$.
4. Montrer que $*$ est une loi associative, commutative et possédant un élément neutre sur $l^1(\mathbb{Z})$.
5. On considère $u \in l^1(\mathbb{Z})$ défini par $u_0 = 1, u_1 = -1, \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}, u_n = 0$. Montrer que u n'est pas inversible dans $(l^1(\mathbb{Z}), *)$.

Exercice. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche