**Question de cours.** Enoncer le théorème de Bézout. Comment obtenir une telle décomposition en pratique ?

**Réponse.** Soit $A$ un anneau principal ($\mathbb{Z}$ ou $K[X]$ par exemple) et $a, b \in A$ premiers entre eux alors il existe $u, v \in A$ tels que
$$1 = au + bv$$
En pratique, dans un anneau euclidien (donc principal), on utilise l'algorithme d'Euclide qui consiste en des divisions euclidiennes successives.

**Exercice.** On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$
Déterminer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

*Démonstration.* Le système précédent se réécrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate,
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$
Or $\chi_A = (X-2)(X-3)$, donc le polynôme caractéristique $\chi_A$ est scindé à racines simples, donc $A$ est diagonalisable.
De plus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 2 et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 3.
Donc
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X_0$$
ie
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n & = & -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{array} \right.$$
$\square$

**Exercice.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq End(\mathbb{C}^n)$ tels que
$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que les vecteurs propres communs à $A$ et $B$ sont dans $ker(C)$.
2. Montrer que $ker(C) \neq \{0\}$.
3. Montrer que $ker(C)$ est stable par $A$ et $B$.
4. On note $A'$ (respectivment $B'$) l'endomorphisme induit par la restriction de $A$ (respectivement $B$) à $ker(C)$. Montrer que $A'$ et $B'$ admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que $A, B, C$ admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que $A, B, C$ sont cotrigonalisables.

*Démonstration.*

1. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre commun à $A$ et $B$.
   Alors il existe $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{C}$ tels que
   $$Ax = \lambda_A x, Bx = \lambda_B x$$
   Ainsi
   $$Cx = ABx - BAx = \lambda_B Ax - \lambda_A Bx = \lambda_B \lambda_A x - \lambda_A \lambda_B x = 0$$
   D'où $x \in ker(C)$.
2. Si $ker(C) = \{0\}$ alors $C$ est inversible, donc
   $$C^{-1}AB - C^{-1}BA = I_n$$
   D'où, comme $B$ et $C^{-1}$ commutent, $0 = tr(I_n) = n$ ce qui est absurde, donc $ker(C) \neq \{0\}$.
3. Soit $x \in ker(C)$, alors $CAx = ACx = 0$, donc $Ax \in ker(C)$, ie $ker(C)$ est $A$-stable.
   De même $ker(C)$ est $B$-stable.
4. $A'$ et $B'$ commutent car
   $$\forall y \in ker(C), ABy - BAy = Cy = 0$$
   Ainsi $A'$ et $B'$ admettent un vecteur propre commun $x \in ker(C)$.
   En effet, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $A'$ admet au moins un valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Puis $ker(A' - \lambda I)$ est stable par $B'$ car $A'$ et $B'$ commutent. Donc l'endomorphisme induit par la restriction de $B'$ à $ker(A' - \lambda I)$ admet une valeur propre $\mu$ : il existe $x \in ker(A' - \lambda I) \backslash \{0\}$ tel que $B'x = \mu$, et $A'x = \lambda x$.
5. Par conséquent $Ax = A'x = \lambda x, Bx = B'x = \mu x$ et $Cx = 0 = 0x$, d'où $x$ est un vecteur propre commun à $A, B, C$.
6. On complète la famille $(x)$ en une base $(x, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et on note $P$ la matrice de passage avec la base canonique.
   Ainsi
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & \overline{A} \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & (*) \\ (0) & \overline{B} \end{pmatrix}, P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ (0) & \overline{C} \end{pmatrix}$$
   On a donc $\overline{AB} - \overline{BA} = \overline{C}, \overline{AC} = \overline{CA}$ et $\overline{BC} = \overline{CB}$.
   Par conséquent une récurrence sur la dimension permet de conclure.

$\square$

**Exercice.**

1. Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $u$ un endomorphisme de $E$ et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ le spectre de $u$.
   (a) Montrer que si $u$ est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
   (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_p)\}$
2. (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
   (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par
   $$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$
   Montrer que si $M \in ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors
   $$Q(A)M = MQ(B)$$
   (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

*Démonstration.*

1. (a) Comme $u$ est diagonalisable, il existe existe une base $b$ de $E$ telle que
   $$Mat_b(u) = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$
   Ainsi
   $$Mat_b(Q(u)) = Q(Mat_b(u)) = Q(Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = Diag(Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_n))$$
   D'où $Q(u)$ est diagonalisable.
   (b) Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $u$ est trigonalisable, donc, comme précédemment, $Q(u)$ est trigonalisable et la diagonale de $Mat_b(Q(u))$ est $Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_n)$, d'où $\chi_{Q(u)} = (X - Q(\lambda_1))...(X - Q(\lambda_n))$, ainsi
   $$Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_p)\}$$
2. (a) On note $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$. Alors, d'après la question précédente,
   $$Sp(\chi_B(A)) = \{\chi_B(\lambda_1), ..., \chi_B(\lambda_p)\}$$
   Donc les valeurs propres de $\chi_B(A)$ sont non nulles car
   $$Z(\chi_B) \cap Sp(A) = Sp(B) \cap Sp(A) = \varnothing$$
   Ainsi $\chi_B(A)$ est inversible ie $det(\chi_B(A)) \neq 0$.
   (b) Soit $M \in ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors $M \in M_n(\mathbb{C})$ et
   $$0 = \varphi(M) = AM - MB \text{ ie } AM = MB$$
   Alors $A^2M = A(AM) = A(MB) = (MB)B = MB^2$ puis par récurrence on a
   $$\forall k \in \mathbb{N}, A^kM = MB^k$$
   Puis par linéarité $Q(A)M = MQ(B)$.

(c) L'application $\varphi$ est linéaire. Puis pour $M \in ker(\varphi)$ et $Q = \chi_B \in \mathbb{C}[X]$, d'après la question précédente,

$$\chi_B(A)M = M\chi_B(B) = 0$$

par théorème de Cayley-Hamilton.
De plus d'après la question 2.$(a)$, $\chi_B(A)$ est inversible, donc $M = 0$.
Par conséquent $\varphi$ est linéaire puis comme il s'agit d'un endomorphisme, $\varphi$ est bijectif.

$\square$

**Question de cours.** Enoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité d'un endomorphisme en termes de polynômes.

**Réponse.** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$, alors $u$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

**Exercice.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que $u$ est nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, montrer que la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre
2. Montrer que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est stable par $u$, puis écrire la matrice de l'endomorphisme induit par la restriction dans la base $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$.

*Démonstration.* Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$. On suppose que la famille est liée, alors il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1} \in K$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

On considère

$$p = min\{k \in [\![0, q-1]\!], \lambda_k \neq 0\}$$

Or, comme $u^{q-1}(x) \neq 0$, on a nécessairement $p < q-1$. De plus

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$$

Puis on considère

$$\forall k \in [\![p+1, q-1]\!], \mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p}$$

Ainsi

$$u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)$$

Donc

$$u^{q-1}(x) = u^{q-1-p}(u^p(x)) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x) = 0$$

ce qui est absurde.
Par conséquent la famille est libre.
Soit $y \in F$, alors il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1} \in K$ tels que

$$y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)$$

Donc, comme $u^q(x) = 0$,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{k-1} u^k(x) \in F$$

D'où $F$ est $u$-stable.
De plus, en notant $b = (x, u(x), ...u^{q-1}(x))$, on a

$$Mat_b(u_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & (0) & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

**Exercice.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, $f$ un endomorphisme de $E$, $A$ et $B$ deux polynômes à coefficients dans $K$, $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.
4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

*Démonstration.* Commençons par remarquer qu'il existe $A', B' \in K[X]$ tels que $A = DA'$ et $B = DB'$ avec $A'$ et $B'$ premiers entre eux.
Or $MD = AB = D^2A'B'$, ainsi $M = DA'B'$.
Puis par relation de Bézout sur $A'$ et $B'$, il existe $P, Q \in K[X]$ tels que

$$1 = A'P + B'Q$$

1. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $ker(D(f)) \subset ker(A(f))$.
   De même $ker(D(f)) \subset ker(B(f))$, d'où $ker(D(f)) \subset ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
   Réciproquement soit $x \in ker(A(f)) \cap ker(B(f))$, alors
   $$D(f)(x) = P(f) \circ A(f)(x) + Q(f) \circ B(f)(x) = 0$$
   Donc $x \in ker(D(f))$.
   Par conséquent $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$.
   De même $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$, d'où $Im(A(f)) + Im(B(f)) \subset Im(D(f))$.
   Réciproquement soit $y \in Im(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que
   $$y = D(f)(x) = A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) \in Im(A(f)) + Im(B(f))$$
   Par conséquent $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. On a $M = DA'B' = AB'$, donc $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, d'où $ker(A(f)) \subset ker(M(f))$.
   De même $ker(B(f)) \subset ker(M(f))$, d'où $ker(A(f)) + ker(B(f)) \subset ker(M(f))$.
   Réciproquement soit $x \in ker(M(f))$, alors $M(f)(x) = 0$.
   Or
   $$x = A'(f) \circ P(f)(x) + B'(f) \circ Q(f)(x)$$
   avec $B(f)(A'(f) \circ P(f)(x)) = (BA'P)(f)(x) = (MP)(f)(x) = P(f) \circ M(f)(x) = 0$.
   De même $A(f)(B'(f) \circ Q(f)(x)) = 0$, d'où $x \in ker(B(f)) + ker(A(f))$.
   Par conséquent $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.

4. On a $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, donc $Im(M(f)) \subset Im(A(f))$.
De même $Im(M(f)) \subset Im(B(f))$, d'où $Im(M(f)) \subset Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.
Réciproquement soit $y \in Im(A(f)) \cap Im(B(f))$, alors il existe $x_A, x_B \in E$ tels que

$$y = A(f)(x_A) \text{ et } y = B(f)(x_B)$$

Or

$$y = A'(f) \circ P(f)(y) + B'(f) \circ Q(f)(y)$$

avec

$$A'(f) \circ P(f)(y) = (A'PB)(f)(x) = M(f) \circ P(f) \in Im(M(f)) \text{ et } B'(f) \circ Q(f)(y) \in Im(M(f))$$

Donc $y \in Im(M(f))$.
Par conséquent $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

□

**Exercice.** Soit $A$ un anneau commutatif et $a, b \in A$ tels que l'idéal $(a) + (b)$ soit principal. Montrer que l'idéal $(a) \cap (b)$ est principal.

*Démonstration.* Comme $(a) + (b)$ est principal, il existe $d \in A$ tel que

$$(a) + (b) = (d)$$

Soit $x \in (a) \cap (b)$, alors il existe $u, v \in A$ tel que $x = ua$ et $x = vb$.
Or $a, b \in (a) + (b) = (d)$, donc il existe $\alpha, \beta \in A$ tels que $a = d\alpha$ et $b = d\beta$.
De plus $d \in (d) = (a) + (b)$, donc il existe $\lambda, \mu \in A$ tels que $d = \lambda a + \mu b$.
Ainsi

$$\begin{aligned} x &= u(\alpha d) = u\alpha(\lambda a + \mu b) = \lambda\alpha(ua) + u\mu\alpha(b) = \lambda\alpha(x) + u\mu\alpha d\beta = \alpha\lambda v(b) + u\mu\alpha\beta d \\ &= \alpha\lambda v d\beta + u\mu\alpha\beta d = \alpha\beta d(\lambda v + \mu u) \end{aligned}$$

D'où, en notant $m = \alpha\beta d$, on a $x \in (m)$, ce qui montre que $(a) \cap (b) \subset (m)$.
Réciproquement soit $x \in (m)$, alors il existe $y \in A$ tel que $x = ym = y\alpha\beta d$, d'où $x = y\beta a$ et $x = y\alpha b$. D'où $x \in (a) \cap (b)$, ce qui montre que $(a) \cap (b) \subset (m)$.
Par conséquent $(a) \cap (b) = (m)$ est principal. □

**Question de cours.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u_{|F}$ ? Le démontrer.

**Réponse.** Premièrement, pour que $u_{|F}$ soit un endomorphisme, il faut que $F$ soit stable par $u$. Dans ce cas on peut considérer son polynôme caractéristique $\chi' := \chi_{u_{|F}}$. On a alors $\chi' \mid \chi_u$.
En effet soit $(e_1, ..., e_k)$ une base de $F$ que l'on complète en une base $(e_1, ..., e_n)$ de $E$.
Alors, comme $F$ est $u$-stable, en notant $B = Mat_{(e_1,...,e_k)}(u_{|F})$ et $A = Mat_{(e_1,...,e_n)}(u)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ (0) & * \end{pmatrix}$$

D'où

$$\chi_u = det(XI_n - A) = det \begin{pmatrix} XI_k - B & * \\ (0) & ** \end{pmatrix} = det(XI_k - B)Q = \chi' Q$$

avec $Q \in K[X]$.
Ainsi $\chi' \mid \chi_u$.

**Exercice.** On considère $E$ le sous-espace vectoriel des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Déterminer une $K$-base de $E$ et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

   Déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Démonstration.*

1. Soit $A \in M_2(K)$, alors

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \iff a + d = 0 \iff a = -d$$

   Donc

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

   Ainsi $b = (E_1, E_2, E_3)$ est une famille génératrice de $E$, de plus il s'agit d'une famille libre, donc $(E_1, E_2, E_3)$ est une base de $E$, d'où $E$ est de dimension 3.
2. On a $f(E_1) = -4E_3, f(E_2) = 2E_1 + 2E_2, f(E_3) = -2E_3$.
   Donc

$$C := Mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. On détermine $\chi_C$ puis on diagonalise $C$ avec les matrices de passage pour obtenir
$$\forall n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1+(-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$
Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme $Mat_b(f^n) = C^n$, on obtient
$$f^n(A) = af^n(E_1)+bf^n(E_2)+cf^n(E_3) = 2^n \begin{pmatrix} b & b \\ 2a(-1)^n - b(1+(-1)^n) + c(-1)^n & -b \end{pmatrix}$$
□

**Exercice.** On dit qu'un anneau $A$ est principal si pour tout idéal $I$ de $A$, il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$.
Citer deux anneaux principaux.
Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.
Indication : Considérer l'idéal $\langle 2, X \rangle$.

*Démonstration.* Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ sont principaux.
Puis pour $\mathbb{Z}[X]$, on suppose que $\mathbb{Z}[X]$ est principal et on considère l'idéal $I = \langle 2, X \rangle$.
Alors il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que
$$\langle 2, X \rangle = I = \langle P \rangle$$
En particulier $2 \in I$, donc il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $2 = QP$.
On en déduit que $P \in \{1, -1, 2, -2\}$.
De plus $X \in I$, donc il existe $R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $X = RP$.
Par conséquent en identifiant le coefficient devant le terme en $X$, on en déduit que $P$ ne peut pas être égal à 2 ou $-2$ car $R$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Donc $P \in \{1, -1\}$ puis $\langle 2, X \rangle = I = \mathbb{Z}[X]$.
En particulier $1 \in \mathbb{Z}[X]$, donc il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $1 = 2U + XV$.
Par conséquent, en évaluant en 0, on obtient $1 = 2U(0)$ avec $U(0) \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde car 2 ne divise pas 1 dans $\mathbb{Z}$.
On en déduit donc que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. □

**Exercice.** Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et non diagonalisable puis, en notant $u = u_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que dans la base canonique $e$ de $\mathbb{R}^3$, $Mat_e(u) = A$, déterminer une base $(v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

*Démonstration.* On a, après calcul, $\chi_A = (X-1)^2(X+2)$ scindé, donc $A$ est trigonalisable et ses valeurs propres 1 (de multiplicité algébrique 2) et $-2$ (de multiplicité algébrique 1).
Ainsi, en notant $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que, dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, $A = Mat_e(u)$, on a l'existence d'une base $(v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$Mat_v(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit
$$\left\{\begin{array}{l} u(v_1)=v_1 \\ u(v_2)=av_1+v_2 \\ u(v_3)=bv_1+cv_2-2v_3 \end{array}\right.$$
La première équation donne, en notant $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées de $v_1$ dans la base $e$,
$$\left\{\begin{array}{cccc} -4x_1 & & -2z_1 & =x_1 \\ 5x_1 & +y_1 & +3z_1 & =z_1 \end{array}\right. \text{ ie } \left\{\begin{array}{cccc} -5x_1 & & -2z_1 & =0 \\ 5x_1 & +y_1 & +2z_1 & =0 \end{array}\right.$$
On peut donc prendre $v_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Puis, en notant $x_2, y_2, z_2$ les coordonnées de $v_2$ dans la base canonique $e$ de $\mathbb{R}^3$, on a par la deuxième équation
$$\left\{\begin{array}{cccccc} -4x_2 & & -2z_2 & = & 2a & +x_2 \\ 5x_2 & +y_2 & +3z_2 & = & -5a & +z_2 \end{array}\right. \text{ ie } \left\{\begin{array}{ccccc} -5x_2 & & -2z_2 & = & 2a \\ 5x_2 & +y_2 & +2z_2 & = & -5a \end{array}\right.$$
ie, en sommant les deux équations,
$$\left\{\begin{array}{rcl} -5x_2-2z_2 & = & 2a \\ y_2 & = & -3a \end{array}\right.$$
On peut donc choisir $a=1$ et $v_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Enfin, en notant $x_3, y_3, z_3$ les coordonnées de $v_3$ dans la base canonique $e$ de $\mathbb{R}^3$, on a par la troisième équation,
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -4x_3 & & -2z_3 & = & 2b & -2c & -2x_3 \\ 5x_3 & +y_3 & +3z_3 & = & -5b & +4c & -2z_3 \end{array}\right. \text{ ie } \left\{\begin{array}{ccccc} -2x_2 & & -2z_2 & = & 2b-2c \\ 5x_3 & +y_3 & +5z_3 & = & -5b+4c \end{array}\right.$$
Sauf qu'on sait qu'il existe un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $-2$, on peut donc prendre $b=c=0$ pour obtenir
$$\left\{\begin{array}{ccccc} -2x_2 & & -2z_2 & = & 0 \\ 5x_3 & +y_3 & +5z_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
On peut donc choisir $v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $Mat_v(u)=Mat_v(u)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ □