**Question de cours.** Enoncer le critère des séries alternées.

**Réponse.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^N$ décroissante telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus sa somme $S$ vérifie

$$\forall n \in N, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, |R_n| \leq a_{n+1}$$

**Exercice.** Donner une autre expression de l'intégrale suivante : $\int_0^1 x^x dx$.

**Réponse.** On a $\int_0^1 x^x dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

*Démonstration.*
Soit $x \in ]0,1]$, alors

$$x^x = e^{xln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xln(x))^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Alors :

1. Les fonctions $f_n$ sont continues par morceaux sur $]0,1]$.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$.
3. La fonction somme $\sum f_n : x \longmapsto x^x$ est continue sur $]0,1]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{|J_n|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (d'après ce qui suit).
   Donc
   $$\int_0^1 |f_n(x)|dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   D'où $\sum \int_0^1 |f_n(x)|dx$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $x \longmapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$, $\sum \int_0^1 f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

On considère, pour $p, k \in \mathbb{N}$, $f_{p,k} : x \in ]0,1] \longmapsto x^p ln(x)^k$, alors $f_{p,k}$ est continue sur $]0,1]$ et, par croissance comparée, $f_{p,k}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $]0,1]$.
Donc $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
On a, par intégrations par parties à justifier,

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$$

On montre par récurrence sur $k$ que

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

Ainsi

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

□

**Exercice.** Soit $f : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $f \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} f < +\infty$ alors est-ce que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ?
2. Si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale convergente alors est-ce que $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ ?

**Réponse.**

1. Non.
2. Non.

*Démonstration.*

1. On peut considérer une fonction dont le graphe est composé de triangles de plus en plus haut et d'aire fixe égal à $\frac{1}{n^2}$, pour avoir $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} < +\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On peut considérer une fonction dont le graphe est composé de triangles dont les aires sont alternativement $\frac{1}{n}$ et $\frac{-1}{n}$, pour avoir $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente et $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

□

**Exercice.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux familles de réels. On définit, quand cela a du sens,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (u * v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

Donner un espace vectoriel normé dans lequel $*$ est une loi de composition interne.
Dans ce cas, que peut-on dire de la norme de $u * v$ ?
De plus, muni de la loi additive et la loi $*$, que pouvez-vous dire de sa structure d'anneau ?

**Réponse.**
On peut considèrer $l^1(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des familles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ sommables muni de la norme $\|u\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$.
On a alors

$$\forall u, v \in l^1(\mathbb{Z}), \|u * v\| \leq \|u\| \, \|v\|$$

De plus $(l^1(\mathbb{Z}), +, *)$ est un anneau mais n'est pas un corps. Il ne s'agit même pas d'un anneau intègre.

*Démonstration.*
Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z})$. Alors la famille $(|v_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est majorée par une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, |u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$$

Or $u \in l^1(\mathbb{Z})$, donc $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable car $v \in l^1(\mathbb{Z})$, de somme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$

Or la famille $\left(|u_k|\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable car $u\in l^1(\mathbb{Z})$, de somme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_kv_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|$$

Ainsi la famille $(u_kv_{n-k})_{k,n\in\mathbb{Z}}$ est sommable de somme $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}u_k\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}v_n$.
Par conséquent la famille $\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}u_kv_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme, d'où $u*v\in l^1(\mathbb{Z})$.
Puis en prenant les modules on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_kv_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|$$

Ainsi

$$\|u*v\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_kv_{n-k}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_kv_{n-k}| = \|u\|\,\|v\|$$

Pour $n\in\mathbb{Z}$, on a $(u*v)_n = \sum\limits_{k+l=n}u_kv_l$.
Donc, pour $u,v\in l^1(\mathbb{Z})$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$(u*v)_n = \sum_{k+l=n}u_kv_l = (v*u)_n$$

ce qui montre la commutativité de $*$.
Puis pour l'associativité, pour $u,v,w\in l^1(\mathbb{Z})$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$((u*v)*w)_n = \sum_{k+l=n}(u*v)_kw_l = \sum_{k+l=n}\sum_{i+j=k}u_iv_jw_l = \sum_{i+j+l=n}u_iv_jw_l = (u*(v*w))_n$$

Et l'élément neutre est donnée par $\delta_0$ défini par $\delta_{0,n}=1$ si $n=0$ et $\delta_{0,n}=0$ sinon,

$$(u*\delta_0)_n = \sum_{k+l=n}u_k\delta_{0,l} = u_n$$

Cependant $l^1(\mathbb{Z})$ n'est pas un corps. En effet on peut considérer $u\in l^1(\mathbb{Z})$ défini par $u_0 = 1, u_1=-1, \forall n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}, u_n=0$.
Alors $u$ n'est pas inversible (et non nul).
En effet, on suppose que $u$ soit inversible et notons $v$ son inverse. Alors

$$\forall n\in\mathbb{Z}, \delta_{0,n} = (u*v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}}u_kv_{n-k} = v_n - v_{n-1}$$

Ainsi, pour $n\geq 1$, on obtient $v_n = v_{n-1}$, d'où, par récurrence immédiate, $v_n=v_0$.
Or $v\in l^1(\mathbb{Z})$, donc $v_0=0$.
Puis, pour $n=0$ dans l'égalité précédente, on obtient $1=v_0-v_{-1}$ ie $v_{-1}=-1$.
Donc, pour $n\leq -1$, $v_{n-1}=v_n$, d'où, par récurrence immédiate, $v_n=v_{-1}=-1$ ce qui n'est pas possiblle car $v\in l^1(\mathbb{Z})$.
Par conséquent $u$ n'admet pas d'inverse dans $(l^1(\mathbb{Z}),*)$. □