

Question de cours. Que peut-on dire des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n ?

Réponse. Ces normes sont équivalentes et on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$.

Exercice. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n .

Démonstration. Le système précédent se réécrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or $\chi_A = (X - 2)(X - 3)$, donc le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

De plus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X_0$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n = -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{cases}$$

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes.

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent également et vers la même limite.

2. Réciproquement on suppose que

$$u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \text{ et } u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \|u_{2n} - l\| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \geq N_2, \|u_{2n+1} - l\| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1), \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

3. On peut considérer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

□

Exercice.

1. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de u .
 - (a) Montrer que si u est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
 - (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$
2. (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
 - (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$

Montrer que si $M \in \ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors

$$Q(A)M = MQ(B)$$

- (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists ! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

Démonstration.

1. (a) Comme u est diagonalisable, il existe une base b de E telle que

$$Mat_b(u) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Ainsi

$$Mat_b(Q(u)) = Q(Mat_b(u)) = Q(Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = Diag(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$$

D'où $Q(u)$ est diagonalisable.

- (b) Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, u est trigonalisable, donc, comme précédemment, $Q(u)$ est trigonalisable et la diagonale de $Mat_b(Q(u))$ est $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$, d'où $\chi_{Q(u)} = (X - Q(\lambda_1)) \dots (X - Q(\lambda_n))$, ainsi

$$Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$$

2. (a) On note $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors, d'après la question précédente,

$$Sp(\chi_B(A)) = \{\chi_B(\lambda_1), \dots, \chi_B(\lambda_p)\}$$

Donc les valeurs propres de $\chi_B(A)$ sont non nulles car

$$Z(\chi_B) \cap Sp(A) = Sp(B) \cap Sp(A) = \emptyset$$

Ainsi $\chi_B(A)$ est inversible ie $det(\chi_B(A)) \neq 0$.

- (b) Soit $M \in ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors $M \in M_n(\mathbb{C})$ et

$$0 = \varphi(M) = AM - MB \text{ ie } AM = MB$$

Alors $A^2M = A(AM) = A(MB) = (MB)B = MB^2$ puis par récurrence on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$$

Puis par linéarité $Q(A)M = MQ(B)$.

- (c) L'application φ est linéaire. Puis pour $M \in ker(\varphi)$ et $Q = \chi_B \in \mathbb{C}[X]$, d'après la question précédente,

$$\chi_B(A)M = M\chi_B(B) = 0$$

par théorème de Cayley-Hamilton.

De plus d'après la question 2.(a), $\chi_B(A)$ est inversible, donc $M = 0$.

Par conséquent φ est linéaire puis comme il s'agit d'un endomorphisme, φ est bijectif.

□

Question de cours. Énoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité et une caractérisation de la diagonalisabilité d'un endomorphisme en termes de polynômes d'endomorphismes.

Réponse. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

Alors u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Et u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq \text{End}(\mathbb{C}^n)$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que les vecteurs propres communs à A et B sont dans $\ker(C)$.
2. Montrer que $\ker(C) \neq \{0\}$.
3. Montrer que $\ker(C)$ est stable par A et B .
4. On note A' (respectivement B') l'endomorphisme induit par la restriction de A (respectivement B) à $\ker(C)$. Montrer que A' et B' admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre commun à A et B .

Alors il existe $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{C}$ tels que

$$Ax = \lambda_A x, Bx = \lambda_B x$$

Ainsi

$$Cx = ABx - BAx = \lambda_B Ax - \lambda_A Bx = \lambda_B \lambda_A x - \lambda_A \lambda_B x = 0$$

D'où $x \in \ker(C)$.

2. Si $\ker(C) = \{0\}$ alors C est inversible, donc

$$C^{-1}AB - C^{-1}BA = I_n$$

D'où, comme B et C^{-1} commutent, $0 = \text{tr}(I_n) = n$ ce qui est absurde, donc $\ker(C) \neq \{0\}$.

3. Soit $x \in \ker(C)$, alors $C Ax = ACx = 0$, donc $Ax \in \ker(C)$, ie $\ker(C)$ est A -stable. De même $\ker(C)$ est B -stable.

4. A' et B' commutent car

$$\forall y \in \ker(C), ABy - BAy = Cy = 0$$

Ainsi A' et B' admettent un vecteur propre commun $x \in \ker(C)$.

En effet, comme \mathbb{C} est algébriquement clos, A' admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Puis $\ker(A' - \lambda I)$ est stable par B' car A' et B' commutent. Donc l'endomorphisme induit par la restriction de B' à $\ker(A' - \lambda I)$ admet une valeur propre μ : il existe $x \in \ker(A' - \lambda I) \setminus \{0\}$ tel que $B'x = \mu x$, et $A'x = \lambda x$.

- Par conséquent $Ax = A'x = \lambda x$, $Bx = B'x = \mu x$ et $Cx = 0 = 0x$, d'où x est un vecteur propre commun à A, B, C .
- On complète la famille (x) en une base (x, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n et on note P la matrice de passage avec la base canonique.

Ainsi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & \overline{A} \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & (*) \\ (0) & \overline{B} \end{pmatrix}, P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ (0) & \overline{C} \end{pmatrix}$$

On a donc $\overline{AB} - \overline{BA} = \overline{C}$, $\overline{AC} = \overline{CA}$ et $\overline{BC} = \overline{CB}$.

Par conséquent une récurrence sur la dimension permet de conclure.

□

Exercice.

- Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.
- Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$.
On pourra commencer par le cas $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1 = \sum_{i=1}^n b_i^q$.
- En déduire que $\|\cdot\|_p : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur \mathbb{R}^n .

Démonstration.

- Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Par concavité de la fonction \ln ,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \ln((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)\ln(x) + \lambda\ln(y) = \ln(x^{1-\lambda}y^\lambda)$$

Donc, par croissance de la fonction \exp ,

$$\forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \geq x^{1-\lambda}y^\lambda$$

Ainsi, pour $\lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$,

$$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}$$

Puis, en appliquant ce qui précède avec x^p, y^q ,

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

- On suppose $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1 = \sum_{i=1}^n b_i^q$.

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Puis, dans le cas général, en appliquant ce qui précède avec $\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, $\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. L'application $\|\cdot\|_p$ vérifie bien les axiomes d'une norme : seul l'inégalité triangulaire est non trivial.

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Alors on a

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

D'où, par la question précédente,

$$\|x + y\|_p^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Puis, après simplification,

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \frac{\|x + y\|_p^p}{\|x + y\|_p}$$

ce qui conclut. □

Exercice. Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E , A et B deux polynômes à coefficients dans K , $D = \text{PGCD}(A, B)$ et $M = \text{PPCM}(A, B)$.

1. Montrer que $\ker(D(f)) = \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.
2. Montrer que $\text{Im}(D(f)) = \text{Im}(A(f)) + \text{Im}(B(f))$.
3. Montrer que $\ker(M(f)) = \ker(A(f)) + \ker(B(f))$.
4. Montrer que $\text{Im}(M(f)) = \text{Im}(A(f)) \cap \text{Im}(B(f))$.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il existe $A', B' \in K[X]$ tels que $A = DA'$ et $B = DB'$ avec A' et B' premiers entre eux.

Or $MD = AB = D^2 A' B'$, ainsi $M = DA' B'$.

Puis par relation de Bézout sur A' et B' , il existe $P, Q \in K[X]$ tels que

$$1 = A'P + B'Q$$

1. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $\ker(D(f)) \subset \ker(A(f))$.
De même $\ker(D(f)) \subset \ker(B(f))$, d'où $\ker(D(f)) \subset \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.
Réciproquement soit $x \in \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$, alors

$$D(f)(x) = P(f) \circ A(f)(x) + Q(f) \circ B(f)(x) = 0$$

Donc $x \in \ker(D(f))$.

Par conséquent $\ker(D(f)) = \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.

2. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$.
 De même $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$, d'où $Im(A(f)) + Im(B(f)) \subset Im(D(f))$.
 Réciproquement soit $y \in Im(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = D(f)(x) = A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) \in Im(A(f)) + Im(B(f))$$

Par conséquent $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.

3. On a $M = DA'B' = AB'$, donc $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, d'où $ker(A(f)) \subset ker(M(f))$.
 De même $ker(B(f)) \subset ker(M(f))$, d'où $ker(A(f)) + ker(B(f)) \subset ker(M(f))$.
 Réciproquement soit $x \in ker(M(f))$, alors $M(f)(x) = 0$.

Or

$$x = A'(f) \circ P(f)(x) + B'(f) \circ Q(f)(x)$$

avec $B(f)(A'(f) \circ P(f)(x)) = (BA'P)(f)(x) = (MP)(f)(x) = P(f) \circ M(f)(x) = 0$.

De même $A(f)(B'(f) \circ Q(f)(x)) = 0$, d'où $x \in ker(B(f)) + ker(A(f))$.

Par conséquent $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.

4. On a $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, donc $Im(M(f)) \subset Im(A(f))$.
 De même $Im(M(f)) \subset Im(B(f))$, d'où $Im(M(f)) \subset Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.
 Réciproquement soit $y \in Im(A(f)) \cap Im(B(f))$, alors il existe $x_A, x_B \in E$ tels que

$$y = A(f)(x_A) \text{ et } y = B(f)(x_B)$$

Or

$$y = A'(f) \circ P(f)(y) + B'(f) \circ Q(f)(y)$$

avec

$$A'(f) \circ P(f)(y) = (A'PB)(f)(x) = M(f) \circ P(f) \in Im(M(f)) \text{ et } B'(f) \circ Q(f)(y) \in Im(M(f))$$

Donc $y \in Im(M(f))$.

Par conséquent $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

□

Question de cours. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E . Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u|_F$? Le démontrer.

Réponse. Premièrement, pour que $u|_F$ soit un endomorphisme, il faut que F soit stable par u . Dans ce cas on peut considérer son polynôme caractéristique $\chi' := \chi_{u|_F}$. On a alors $\chi' \mid \chi_u$.

En effet soit (e_1, \dots, e_k) une base de F que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E .

Alors, comme F est u -stable, en notant $B = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_k)}(u|_F)$ et $A = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ (0) & * \end{pmatrix}$$

D'où

$$\chi_u = \det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} XI_k - B & * \\ (0) & ** \end{pmatrix} = \det(XI_k - B)Q = \chi'Q$$

avec $Q \in K[X]$.

Ainsi $\chi' \mid \chi_u$.

Exercice. On considère E le sous-espace vectoriel des $M \in M_2(K)$ tels que $\text{tr}(M) = 0$.

1. Déterminer une K -base de E et en déduire sa dimension.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

Déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ \dots \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. Soit $A \in M_2(K)$, alors

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \iff a + d = 0 \iff a = -d$$

Donc

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

Ainsi $b = (E_1, E_2, E_3)$ est une famille génératrice de E , de plus il s'agit d'une famille libre, donc (E_1, E_2, E_3) est une base de E , d'où E est de dimension 3.

2. On a $f(E_1) = -4E_3$, $f(E_2) = 2E_1 + 2E_2$, $f(E_3) = -2E_3$.

Donc

$$C := \text{Mat}_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. On détermine χ_C puis on diagonalise C avec les matrices de passage pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1 + (-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme $Mat_b(f^n) = C^n$, on obtient

$$f^n(A) = af^n(E_1) + bf^n(E_2) + cf^n(E_3) = 2^n \begin{pmatrix} b & b \\ 2a(-1)^n - b(1 + (-1)^n) + c(-1)^n & -b \end{pmatrix}$$

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{K}^n si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi

$$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

D'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$

Donc

$$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$

Par conséquent

$$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$

Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} l$$

Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent, comme φ est croissante,

$$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - l\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{K}^n .

Le résultat n'est plus vrai sur \mathbb{Q} car par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{Q} car convergente dans \mathbb{R} vers e mais ne converge pas dans \mathbb{Q} . \square

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et non diagonalisable puis, en notant $u = u_A$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , $Mat_e(u) = A$, déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 telle que $Mat_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

Démonstration. On a, après calcul, $\chi_A = (X - 1)^2(X + 2)$ scindé, donc A est trigonalisable et ses valeurs propres 1 (de multiplicité algébrique 2) et -2 (de multiplicité algébrique 1). Ainsi, en notant u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que, dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 , $A = Mat_e(u)$, on a l'existence d'une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 telle que

$$Mat_v(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} u(v_1) = v_1 \\ u(v_2) = av_1 + v_2 \\ u(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3 \end{cases}$$

La première équation donne, en notant x_1, y_1, z_1 les coordonnées de v_1 dans la base e ,

$$\begin{cases} -4x_1 & -2z_1 = x_1 \\ 5x_1 & +y_1 & +3z_1 = z_1 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} -5x_1 & -2z_1 = 0 \\ 5x_1 & +y_1 & +2z_1 = 0 \end{cases}$$

On peut donc prendre $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Puis, en notant x_2, y_2, z_2 les coordonnées de v_2 dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , on a par la deuxième équation

$$\begin{cases} -4x_2 & -2z_2 = 2a & +x_2 \\ 5x_2 & +y_2 & +3z_2 = -5a & +z_2 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} -5x_2 & -2z_2 = 2a \\ 5x_2 & +y_2 & +2z_2 = -5a \end{cases}$$

ie, en sommant les deux équations,

$$\begin{cases} -5x_2 - 2z_2 = 2a \\ y_2 = -3a \end{cases}$$

On peut donc choisir $a = 1$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Enfin, en notant x_3, y_3, z_3 les coordonnées de v_3 dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , on a par la troisième équation,

$$\begin{cases} -4x_3 & -2z_3 = 2b & -2c & -2x_3 \\ 5x_3 & +y_3 & +3z_3 = -5b & +4c & -2z_3 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} -2x_2 & -2z_2 = 2b - 2c \\ 5x_3 & +y_3 & +5z_3 = -5b + 4c \end{cases}$$

Sauf qu'on sait qu'il existe un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2 , on peut donc prendre $b = c = 0$ pour obtenir

$$\begin{cases} -2x_2 & -2z_2 = 0 \\ 5x_3 & +y_3 & +5z_3 = 0 \end{cases}$$

On peut donc choisir $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $Mat_v(u) = Mat_v(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

□