Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Exercice. Donner une autre expression de l'intégrale suivante : $\int_0^1 x^x dx$.

Exercice. On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$. Calculer sa transformée de Fourier

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F_\alpha(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale

$$B_n(f) : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \end{array}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $B_n(f)$ est convexe.

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice. Montrer qu'il existe $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue tel que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$ et que $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$.

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^n dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice. Soit I intervalle réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, on dit que f est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si $\ln(f)$ est convexe sur I.

1. Montrer que si f est log-convexe alors f est convexe.
2. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe,
   (a) Montrer qu'il existe une fonction φ tel que
   $$\forall x, y \in I, \ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$
   (b) En déduire que
   $$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$
   (c) En déduire que f est log-convexe.
3. Citer un exemple de fonction convexe non log-convexe.

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme de la fonction somme d'une série.

Exercice. Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*, u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$$

Exercice. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$ alors $\int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$
2. Est ce que ce résultat est encore vrai avec $[1, +\infty[$ plutôt que $]0, 1[$?

Exercice. Soit $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ intégrable.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A f(t)cos(xt)dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$