Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Réponse. Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

1. Pour tout $x \in J$, $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable (ou continue par morceaux) sur I.
2. Pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est continue sur J.
3. Il existe $g \in L^1(I)$ positive tel que
$$\forall t \in I, \forall x \in J, |f(t,x)| \leq g(t)$$
(ou une domination sur tout compact)

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(t,x)dt$ est continue sur J.

Démonstration. Soit $x \in J$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
On considère alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, f_n(t) := f(t, x_n)$$
On a alors par théorème de convergence dominée
$$F(x_n) = \int_I f(t,x_n)dt = \int_I f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t,x)dt = F(x)$$
D'où, par caractérisation séquentielle de la continuité, F est continue en x, d'où sur J. □

Exercice. Donner une autre expression de l'intégrale suivante : $\int_0^1 x^x dx$.

Réponse. On a $\int_0^1 x^x dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,1]$, alors
$$x^x = e^{xln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xln(x))^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$
Alors :

1. Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0,1]$.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$.
3. La fonction somme $\sum f_n : x \longmapsto x^x$ est continue sur $]0,1]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{|J_n|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (d'après ce qui suit).
Donc
$$\int_0^1 |f_n(x)|dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
D'où $\sum \int_0^1 |f_n(x)|dx$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $x \longmapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$, $\sum \int_0^1 f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

On considère, pour $p, k \in \mathbb{N}$, $f_{p,k} : x \in]0,1] \longmapsto x^p ln(x)^k$, alors $f_{p,k}$ est continue sur $]0,1]$ et, par croissance comparée, $f_{p,k}(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $]0,1]$.
Donc $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
On a, par intégrations par parties à justifier,

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$$

On montre par récurrence sur k que

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

Ainsi

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

$\square$

Exercice. On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$. Calculer sa transformée de Fourier

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F_\alpha(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Réponse. On a

$$F(G_\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$$

Démonstration. Vérifions le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on note $f(x,\xi) = G^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$, alors :

1. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,\xi)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \longmapsto f(x,\xi)$ est de classe C^1 et
$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi) = -ixe^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$$
3. On a
$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}, \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)\right| \leq |x| e^{-\alpha x^2} =: \varphi(x)$$
avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $F(G_\alpha)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx$$

Puis par intégration par parties

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)'(\xi) = i \left[\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\xi}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2\alpha} F(G_\alpha)(\xi)$$

D'où, par résolution de l'équation différentielle,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)(\xi) = F(G_\alpha)(0) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$$

$\square$

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale

$$B_n(f) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \end{array}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $B_n(f)$ est convexe.

Démonstration.

1. Pour $n = 1$: On a $B_1(f) : x \in [0,1] \longmapsto f(0(1-x)) + f(1)x$, donc $B_1(f)$ est affine donc convexe.
2. Pour $n = 2$: On a $B_2(f)$ polynomiale donc deux fois dérivable et

$$\forall x \in [0,1], B_2(f)''(x) = 2\left(f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1\right) \right)$$

   Or f est convexe donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}1\right) \leq \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)$, d'où

$$\forall x \in [0,1], B_2(f)''(x) \geq 0$$

   Ce qui montre bien que $B_2(f)$ est convexe.
3. Pour $n \geq 3$: On a

$$B_n(f)'' = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B''_{n,k}$$

   Soit $x \in [0,1]$ et $k \in [\![2, n-2]\!]$.
   Or $B'_{n,k}(x) = n(B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x))$, donc

$$B''_{n,k}(x) = n(B'_{n-1,k-1}(x) - B'_{n-1,k}(x))$$

ie

$$B''_{n,k}(x) = n(n-1)(B_{n-2,k-2}(x) - B_{n-2,k-1}(x) - B_{n-2,k-1}(x) + B_{n-2,k}(x))$$

ie

$$B''_{n,k}(x) = n(n-1)(B_{n-2,k-2}(x) - 2B_{n-2,k-1}(x) + B_{n-2,k}(x))$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} B_n(f)''(x) & = & f(0)B''_{n,0}(x) + f\left(\frac{1}{n}\right)B''_{n,1}(x) \\ & & +n(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right)(B_{n-2,k-2}(x) - 2B_{n-2,k-1}(x) + B_{n-2,k}(x)) \\ & & +f\left(\frac{n-1}{n}\right)B''_{n,n-1}(x) + f(1)B''_{n,n}(x) \end{array}$$

Or $B'_{n,0}(x) = -n(1-x)^{n-1} = -nB_{n-1,0}(x)$, donc

$$B''_{n,0}(x) = n(n-1)(1-x)^{n-2} = n(n-1)B_{n-2,0}(x)$$

De plus $B'_{n,1}(x) = n(B_{n-1,0}(x) - B_{n-1,1}(x))$, donc

$$B''_{n,1}(x) = n\left(B'_{n-1,0}(x) - B'_{n-1,1}(x)\right) = n\left(-(n-1)B_{n-2,0}(x) - (n-1)(B_{n-2,0}(x) - B_{n-2,1}(x))\right)$$

ie

$$B''_{n,1}(x) = n(n-1)\left(B_{n-2,1}(x) - 2B_{n-2,0}(x)\right)$$

Puis, en notant s la somme apparaissant,

$$\begin{array}{rcl} s & = & \sum\limits_{k=0}^{n-4} f\left(\frac{k+2}{n}\right)B_{n-2,k}(x) - 2\sum\limits_{k=1}^{n-3} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-2,k}(x) + \sum\limits_{k=2}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-2,k}(x) \\ & = & f\left(\frac{2}{n}\right)B_{n-2,0}(x) + f\left(\frac{3}{n}\right)B_{n-2,1}(x) - 2f\left(\frac{2}{n}\right)B_{n-2,1}(x) \\ & & +\sum\limits_{k=2}^{n-4}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}(x) \\ & & -2f\left(\frac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-3}(x) + f\left(\frac{n-3}{n}\right)B_{n-2,n-3} + f\left(\frac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-2}(x) \end{array}$$

Ensuite $B'_{n,n-1}(x) = n(B_{n-1,n-2}(x) - B_{n-1,n-1}(x))$, donc

$$B''_{n,n-1}(x) = n\left(B'_{n-1,n-2}(x) - B'_{n-1,n-1}(x)\right) = n(n-1)\left(B_{n-2,n-3}(x) - 2B_{n-2,n-2}(x)\right)$$

Et comme $B'_{n,n}(x) = nB_{n-1,n-1}(x)$,

$$B''_{n,n}(x) = n(n-1)B_{n-2,n-2}(x)$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{n(n-1)}B_n(f)''(x) & = & f(0)B_{n-2,0}(x) + f\left(\frac{1}{n}\right)(B_{n-2,1}(x) - 2B_{n-2,0}(x)) \\ & & +f\left(\frac{2}{n}\right)B_{n-2,0}(x) + f\left(\frac{3}{n}\right)B_{n-2,1}(x) - 2f\left(\frac{2}{n}\right)B_{n-2,1}(x) \\ & & +\sum\limits_{k=2}^{n-4}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}(x) \\ & & -2f\left(\frac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-3}(x) + f\left(\frac{n-3}{n}\right)B_{n-2,n-3} + f\left(\frac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-2}(x) \\ & & +f\left(\frac{n-1}{n}\right)(B_{n-2,n-3}(x) - 2B_{n-2,n-2}(x)) + f(1)B_{n-2,n-2}(x) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-2}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}(x) \end{array}$$

Or f est convexe, donc

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{k+2}{n} + \frac{1}{2}\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k+2}{n}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Par conséquent $B_n''(f)(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, ce qui montre que $B_n(f)$ est convexe.

$\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Réponse. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, alors

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Démonstration. La fonction ln est strictement concave, donc

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(x_k)}{n} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}\right)$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n$.
Ainsi, par croissance de exp,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

□

Exercice. Montrer qu'il existe $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue tel que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$ et que $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$.

Démonstration. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n - \frac{1}{n^2}, b_n = n + \frac{1}{n^2}$$

Puis la fonction affine par morceaux et continue $f; [0, +\infty[$ définie par :

1. $f = 0$ sur $[0, +\infty[\backslash \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\right)$.
2. $f = 1$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\} = \mathbb{N}$.
3. f affine sur les $[a_n, n]$ et les $[n, b_n]$.

Ainsi

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

De plus f ne tend pas vers 0 vers $+\infty$ car $f(n) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. □

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^n dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration. On a par stricte croissance de f

$$\forall x \in [0,1[, 0 = f(0) \leq f(x) < f(1) = 1$$

Donc, pour $x \in [0,1[$, $(f(x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $f(x) \in [0,1[$, d'où

$$f(x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus $f(1)^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par conséquent la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \delta_1$ continue par morceaux.
Puis on a la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f^n \leq 1$$

avec la fonction constante 1 intégrable sur $[0,1]$.
Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \delta_1 = 0$$

□

Exercice. Soit I intervalle réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, on dit que f est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si $\ln(f)$ est convexe sur I.

1. Montrer que si f est log-convexe alors f est convexe.
2. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe,
   (a) Montrer qu'il existe une fonction φ tel que
   $$\forall x, y \in I, \ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$
   (b) En déduire que
   $$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$
   (c) En déduire que f est log-convexe.
3. Citer un exemple de fonction convexe non log-convexe.

Démonstration.

1. On suppose que f est log-convexe, ainsi la fonction $\ln(f)$ est convexe, donc, par composition de fonctions convexes, $f = \exp(\ln(f))$ est convexe.
2. (a) Soit $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.
   Alors, par convexité,
   $$f((1-\lambda)x + \lambda y)^\alpha \leq (1-\lambda)f(x)^\alpha + \lambda f(y)^\alpha$$
   Donc, par croissance de la fonction ln,
   $$\alpha\ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \ln\left((1-\lambda)f(x)^\alpha + \lambda f(y)^\alpha\right) =: \varphi(\alpha)$$
   ie
   $$(1)\ \ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

(b) Or $\varphi(\alpha) \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$, donc φ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.
De plus φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\varphi'(\alpha) = \frac{(1-\lambda)\ln(f(x))f(x)^\alpha + \lambda\ln(f(y))f(y)^\alpha}{(1-\lambda)f(x)^\alpha + \lambda f(y)^\alpha}$$

Donc
$$\varphi'(\alpha) \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} (1-\lambda)\ln(f(x)) + \lambda\ln(f(y)) = \ln(f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda)$$

Ce qui signifie que φ est dérivable en 0.
D'où, en faisant tendre α vers 0 dans l'inégalité (1), on obtient

$$\ln(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leq \varphi'(0) = \ln(f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda)$$

ie, par croissance de exp, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda$.

(c) Alors d'après la question précédente,

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$

Donc, par croissance de ln,

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], \ln(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leq \ln((f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda) = (1-\lambda)\ln(f(x))+\lambda\ln(f(y))$$

Ce qui montre que f est log-convexe.

3. La fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas log-convexe car $x \longmapsto \ln(x^2) = 2\ln(x)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme de la fonction somme d'une série.

Réponse. Soit $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I.
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)| dx < +\infty$.

Alors $\sum f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx$$

Exercice. Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*, u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$$

Démonstration. La fonction ln est concave, donc pour $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall \lambda \in [0,1], \ln((1-\lambda)u + \lambda v) \geq (1-\lambda)\ln(u) + \lambda \ln(v) = \ln\left(u^{1-\lambda} v^{\lambda}\right)$$

Puis, par croissance de exp,

$$\forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)u + \lambda v \geq u^{1-\lambda} v^{\lambda}$$

D'où, pour $\lambda = \frac{1}{q}$, on a $1 - \lambda = \frac{1}{p}$ et

$$\frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v \geq u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}}$$

□

Exercice. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Démonstration. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :

1. Soit $x \in]0, +\infty[$, alors, comme $0 < e^{-x} < 1$

   $$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   D'où la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \longmapsto \frac{x^2}{e^x - 1}$ sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{e^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ fini.
   Alors, par intégration par parties à justifier,

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} dx = \left[x^2 \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} dx = 0 + \frac{2}{n+1} \int_0^{+\infty} x e^{-(n+1)} dx$$

   Puis, par intégration par parties,

$$\frac{n+1}{2} I_n = \left[x \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} dx = 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

   D'où $I_n = \frac{2}{(n+1)^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$.

   Ainsi, comme $3 > 1$ et I_n positif, par théorème de comparaison, $\sum I_n$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, $\sum \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

□

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = x \int_0^1 f'(ux) du$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \int_0^1 f'(ux) dx$$

De même en $x = 0$, donc

$$g = \int_0^1 f(u \times \cdot) dx$$

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (dont les hypothèses sont facilement vérifiables sur le segment $[0, 1]$), on a g de classe C^∞. □

Exercice. Soit $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$ alors $\int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$
2. Est ce que ce résultat est encore vrai avec $[1, +\infty[$ plutôt que $]0, 1[$?

Démonstration.

1. On suppose $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$.
   Alors
$$\int_0^1 |f(t)|dt = \int_{t\in[0,1],|f(t)|\leq 1} |f(t)|dt + \int_{t\in[0,1],|f(t)|>1} |f(t)|dt \leq 1 + \int_0^1 f(t)^2 dt < +\infty$$

2. Ce résultat n'est plus vérifié : On peut considérer $f : x \in [1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{x}$.
   Alors $\int_1^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty$ mais $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx = +\infty$.

□

Exercice. Soit $f \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ intégrable.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, alors, par intégration par parties, on a
$$\int_0^A f(t)cos(xt)dt = f(A)\frac{sin(xA)}{x} - \int_0^A f'(t)\frac{sin(xt)}{x}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Or f est intégrable, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\int_A^{+\infty} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi
$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt\right| \leq \left|\int_0^A f(t)cos(xt)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$
   Or, d'après la question précédente, $\int_0^A f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \geq x_0, \left|\int_0^A f(t)cos(xt)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Puis
$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt\right| \leq \varepsilon$$
   ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□