Question de cours. Tracer la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

Réponse. (voir cours)

Question de cours. Montrer que $e^x \geq x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Etudier le cas d'égalité.

Réponse. (voir cours)

Question de cours. Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Réponse. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ par n admet un plus grand élément.

- Initialisation : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ par 0 est réduite au singleton $\{0\}$ dont 0 est le plus grand élément.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que toute partie non vide de $\mathbb{N} \cap [0, n]$ admette un maximum. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N} \cap [0, n+1]$. On distingue deux cas. Si $n+1 \in A$ alors $n+1 = max(A)$. Sinon nous avons $A \subset \mathbb{N} \cap [0, n]$ donc A admet un plus grand élément par hypothèse de récurrence.
- Conclusion : Finalement, par principe de récurrence, toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Exercice. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Réponse. Nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
avec $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 3x + 1$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ si et seulement si $x = -\dfrac{1}{2}$. On considère alors la suite v définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{2}.$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n.$$
Par conséquent la suite v est géométrique de raison 3. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - \frac{1}{2} = 3^n v_0 - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Exercice. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x^3+1}{3} \in \mathbb{R}$ et la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet trois solutions.
2. Etudier le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ ainsi que la monotonie de la fonction f.
3. Préciser le comportement de la suite u en fonction de u_0.

Réponse.

1. On considère la fonction $g = 3(f - \mathrm{id})$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 3(f(x) - x)) = x^3 - 3x + 1.$$
Ainsi
$$g(-2) = -1, \quad g(-1) = 1, \quad g(1) = -1, \quad g(2) = 3.$$
Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g admet trois racines distinctes. Autrement dit l'équation $f(x) = x$ admet trois solutions.
2. On considère la fonction $h = f - \mathrm{id} = 3g$. Donc, d'après la question précédente, la fonction h s'annule en trois réels distincts $\alpha < \beta < \gamma$. Or $h'(x) = f'(x) - 1 = x^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la fonction h est croissante sur $]-\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Or $\alpha \in [-2, -1]$, donc la fonction h est négative sur $]-\infty, \alpha]$ puis positive sur $[\alpha, -1]$. De même $\beta \in [-1, 1]$, donc la fonction h est positive sur $[-1, \beta]$ puis négative sur $[\beta, 1]$. Enfin $\gamma \in [1, 2]$, donc la fonction h est négative sur $[1, \gamma]$ puis positive sur $[\gamma, +\infty[$.
La fonction f est croissante car de dérivée la fonction carrée qui est positive.

3. — Si $u_0 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ alors la suite u est constante égale à u_0.
   — Si $u_0 < \alpha$ alors $u_1 = f(u_0) < u_0 < \alpha$ puis, par récurrence, la suite u est strictement décroissante. Si la suite u est minorée alors elle est convergente vers ℓ. Ainsi, faire tendre n vers $+\infty$ dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$. Ainsi $\ell \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ce qui est absurde car $\ell \lim_{n\to+\infty} u_n \leq u_0 < \alpha$. Par conséquent la suite u diverge vers $-\infty$.
   — Si $\alpha < u_0 < \beta$ alors $u_1 = f(u_0) > u_0$ puis, par récurrence la suite u est strictement croissante. Or nous avons également par stricte croissance $u_1 = f(u_0) < f(\beta) = \beta$. Donc, par récurrence, la suite u est majorée par β. Donc la suite u est convergente vers $\ell \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec $\alpha < u_0 \leq \ell \leq \beta < \gamma$. Donc $\ell = \beta$.
   — Si $\beta < u_0 < \gamma$ alors de façon similaire la suite u est strictement décroissante et convergente vers β.
   — Si $u_0 > \gamma$ alors de façon similaire la suite u est strictement croissante et divergent vers $+\infty$.

Question de cours. Tracer la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

Réponse. (voir cours)

Question de cours. Montrer que $\ln(x) \leq x-1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier le cas d'égalité.

Réponse. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x - 1 - \ln(x) \in \mathbb{R}$. Alors la fonction f est dérivable comme différence de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - 1 - \ln(x) = f(x) \geq f(1) = 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Question de cours. Donner un exemple d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de plus grand élément. Le prouver.

Réponse. On peut par exemple considérer la partie $[0,1[$ de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une partie non vide ($0 \in [0,1[$) et majorée (par 1) mais qui n'admet pas de plus grand élément. En effet si on suppose par l'absurde qu'il existe $a \in [0,1[$ tel que $x \leq a$ pour tout $x \in [0,1[$, alors, comme $\frac{a+1}{2} \in [0,1[$, nous avons $\frac{a+1}{2} \leq a$ i.e. $1 \leq a$ ce qui est absurde.

Exercice. On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression réelle de u_n en fonction de n.

Réponse. La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$ donc de solutions

$$r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad r_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Par conséquent il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + \mu \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$

En particulier

$$1 = u_0 = \lambda$$

et

$$2 = u_1 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \mu.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$

Exercice. On considère la fonction $f : x \longmapsto x e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. On pose $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Etudier la continuité de la fonction f.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f en incluant les différentes limites. En déduire l'allure du graphique de la fonction f.

Réponse.

1. Nous devons avoir $x > 0$ pour la fonction ln et $x \neq 1$ pour $\dfrac{1}{\ln(x)}$. Par conséquent le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ comme composée de telles fonctions. De plus $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ comme composée de limites usuelles. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, en notant $y = \ln(x)$,

$$f(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\ln(x)+\frac{1}{\ln(x)}} = e^{y+\frac{1}{y}}.$$

Or

$$y + \frac{1}{y} \underset{y\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty, \quad y + \frac{1}{y} \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

d'où

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0 = f(1), \quad f(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty \neq f(1).$$

Par conséquent la fonction f n'est pas continue en 1.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ comme composée de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}, \quad f'(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}} + x\frac{1}{x}\frac{-1}{(\ln(x))^2}e^{\frac{1}{\ln(x)}} = \left(1 - \frac{1}{(\ln(x))^2}\right)e^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Par conséquent

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ avec $f'(0) = 1$.

4. Nous avons, d'après le calcul à la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}, \quad f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow (\ln(x))^2 \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ puis strictement croissante sur $[e, +\infty[$.

Question de cours. Tracer la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

Réponse.

Question de cours. Réaliser l'étude complète de la fonction $x \longmapsto \ln(\sqrt{x^2 - 3x + 2})$.

Réponse.

Question de cours. Montrer que tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un nombre premier comme diviseur.

Réponse. On montre par récurrence forte sur $n \in \{2, ...\}$ la propriété $P(n)$: "$\exists p \in \mathcal{P}, p \mid n$".

Exercice. On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et de v_n en fonction de n. On pourra étudier la suite $u - v$.

Réponse. La suite $u - v$ est constante égale à $u_0 - v_0 = -1$. Donc $u = v - 1$. Ainsi on obtient une relation de récurrence pour la suite u :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2u_n - 2 = 5u_n - 2.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique dont on peut trouver l'expression générale. On en déduit ensuite l'expression de la suite v.

Exercice. On considère les propositions suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : "3 \mid 4^n - 1", \quad Q(n) : "3 \mid 4^n + 1".$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ et que $Q(n) \Longrightarrow Q(n+1)$.
2. Que peut-on dire de la véracité des propositions $P(n)$ et $Q(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Réponse.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les assertions $P(n)$ et $Q(n)$ soient vraies :

$$3 \mid 4^n - 1, \quad 3 \mid 4^n + 1.$$

   Ainsi
$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 4 + 4 - 1 = 4(4^n - 1) + 3, \quad 4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3.$$

   Or $3 \mid 3, -3, 4^n - 1, 4^n + 1$, donc $3 \mid 4^{n+1} - 1, 4^{n+1} + 1$. Ainsi les assertions $P(n+1)$ et $Q(n+1)$ sont vraies.
2. L'assertion $P(0)$ est vraie donc le théorème de récurrence permet de conclure que l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce n'est pas le cas pour $Q(0)$. Plus précisément l'assertion $Q(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut le montrer par récurrence : Si 3 ne divise pas $4^n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ alors on montre par l'absurde que 3 ne divise pas $4^{n+1} + 1$. On peut également écrire que $4 \equiv 1[3]$ donc $4^n \equiv 1[3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ainsi $4^n + 1 \equiv 2[3]$.