Question de cours. Montrer que les suites u et v définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1), \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

convergent vers la même limite.

Exercice. Etudier la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Réponse. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Donc, par encadrement, $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice. On considère une suite u réelle et les suites a et b définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \inf_{k \geq n} u_k, \quad b_n = \sup_{k \geq n} u_k.$$

1. Montrer que les suites a et b convergent. On note $\liminf u$ et $\limsup u$ leurs limites.
2. Montrer que la suite u converge si et seulement si $\liminf u = \limsup u$.

Réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons
$$a_{n+1} \geq a_n, \quad b_{n+1} \leq b_n.$$
Donc la suite a est décroissante et la suite b croissante. De plus la suite u est bornée par $M \in \mathbb{R}_+$, donc les suites a et b sont bornées par M également. Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, les suites a et b sont convergentes.

2. On procède par double implications.
   - On suppose que la suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell \varepsilon.$$
   Donc
   $$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon.$$
   Ainsi les suites a et b convergent vers ℓ.
   - Réciproquement on suppose que $\liminf u = \limsup u =: \ell$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N_1, \quad \inf_{k \geq n} \geq \ell - \varepsilon$$
   et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N_2, \quad \sup_{k \geq n} \leq \ell + \varepsilon.$$
   Donc, en considérant $N = \max(N_1, N_2)$, nous obtenons
   $$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon.$$
   Donc la suite u est convergente.

Exercice. On considère une suite r de rationnels strictement positifs que l'on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n, q_n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que si $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ alors $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On pourra raisonner par l'absurde par rapport à la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réponse. On suppose par l'absurde que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $+\infty$. Alors il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que

$$q_n \leq A.$$

Ainsi il existe une suite extraite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de q qui soit bornée (par A). Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$q_{\varphi(\psi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q.$$

Or il s'agit d'une suite d'entiers convergente, donc elle est constante à partir d'un certain rang. De plus nous avons

$$p_{\varphi(\psi(n))} = r_{\varphi(\psi(n))} q_{\varphi(\psi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} rq.$$

Or de même il s'agit d'une suite d'entiers convergente, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Ainsi, en considérant n_0 le maximum des deux certains rangs, nous obtenons

$$r = \frac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde car $r \notin \mathbb{Q}$. Par conséquent $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Puis

$$p_n = r_n q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Question de cours. Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice. Déterminer la limite de la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Réponse. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

Donc, par encadrement, nous en déduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Exercice. On considère $K > 1, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 ?

Réponse. Oui elle converge vers 0. En effet, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \varepsilon_n \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K} = \frac{u_n}{K} + \frac{\varepsilon}{K}.$$

Ainsi, par récurrence, on peut montrer que

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{K^{n-N}} + \varepsilon \sum_{k=1}^{n-N} \frac{1}{K^k} = \frac{u_N}{K^{n-N}} + \varepsilon \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{K^{n-N+1}}}{1 - \frac{1}{K}} \leq \frac{u_N}{K^{n-N}} + \frac{\varepsilon}{K-1}.$$

Or

$$\frac{u_N}{K^{n-N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc il existe $N_0 \geq N$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad \frac{u_N}{K^{n-N}} \leq \varepsilon.$$

Ainsi

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K-1} = \frac{K}{K-1}\varepsilon.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice. On considère une suite réelle u. On dit que la suite u est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N, \quad |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

Montrer que la suite u est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Réponse. On procède par double implications.

- On suppose que la suite u est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

  $$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Ainsi

  $$\forall m, n \geq N, \quad |u_m - u_n| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

  Donc la suite u est de Cauchy.

- Réciproquement on suppose que la suite u est de Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall m, n \geq N, \quad |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$
Ainsi
$$\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq \varepsilon + |u_N|.$$
Donc la suite u est bornée à partir du rang N donc est bornée. Ainsi, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
$$u_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$
Donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N', \quad |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$
On considère $N_0 = \max(N, N')$. Alors, comme $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \geq N_0, \quad |u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq 2\varepsilon.$$
Donc la suite u converge.

Question de cours. Enoncer et démontrer la propriété séquentielle de la borne inférieure.

Exercice. Etudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Réponse. Si $a \in]0,1[$ alors la suite est constante égale à 0. Si $a = 1$ alors de même égale à 1. Si $a > 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leq a.$$

Or

$$(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} = a\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} = a \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\exp(0) = a.$$

Donc, par encadrement, la limite est a.

Exercice. On considère la suite réelle u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si $\alpha < 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Montrer que si $\alpha = 1$ alors la suite u est convergente sans déterminer la limite.
4. Montrer que si $\alpha = 1$ alors déterminer la limite de la suite u en utilisant l'encadrement

$$\forall x \in [0,1[, \quad \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x).$$

Réponse.

1. On suppose que $\alpha > 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} \leq \frac{n}{n^\alpha + 1} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. On suppose que $\alpha < 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} \geq \frac{n}{2n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. On suppose $\alpha = 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc la suite u est croissante. De plus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Donc la suite u est majorée. Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, la suite u est convergente.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, nous avons

$$0 \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n+k}\right) = \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right).$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)$$

i.e., par propriété de ln et sommes téléscopiques,

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2).$$

Or

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

et la fonction ln est continue en 2, d'où, par théorème de convergence par encadrement, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice. On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable de fonction dérivée continue. Montrer que si la fonction f s'annule une infinité de fois alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Réponse. On suppose que la fonction f s'annule une infinité de fois. On considère la suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des lieux distincts d'annulations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = 0.$$

Alors la suite x est bornée. Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\alpha \in [a, b]$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Ainsi, par continuité de la fonction f,

$$0 = f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\alpha).$$

Donc $f(\alpha) = 0$. Or $x_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(n+1)}$ sont distincts et la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Donc il existe y_n compris entre $x_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(n+1)}$ tel que $f'(y_n) = 0$. En particulier, par théorème de convergence par encadrement, $y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Puis, par continuité de f',

$$0 = f'(y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f'(\alpha).$$

Donc $f'(\alpha) = 0$.