Question de cours. Montrer que les suites u et v définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1), \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

convergent vers la même limite.

Exercice. Etudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice. On considère une suite u réelle et les suites a et b définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \inf_{k\geq n} u_k, \quad b_n = \sup_{k\geq n} u_k.$$

1. Montrer que les suites a et b convergent. On note $\liminf u$ et $\limsup u$ leurs limites.
2. Montrer que la suite u converge si et seulement si $\liminf u = \limsup u$.

Exercice. On considère une suite r de rationnels strictement positifs que l'on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n, q_n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que si $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alors $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On pourra raisonner par l'absurde par rapport à la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice. Déterminer la limite de la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice. On considère $K > 1, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 ?

Exercice. On considère une suite réelle u. On dit que la suite u est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N, \quad |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

Montrer que la suite u est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Enoncer et démontrer la propriété séquentielle de la borne inférieure.

Exercice. Etudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice. On considère la suite réelle u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si $\alpha < 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Montrer que si $\alpha = 1$ alors la suite u est convergente sans déterminer la limite.
4. Montrer que si $\alpha = 1$ alors déterminer la limite de la suite u en utilisant l'encadrement

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x).$$

Exercice. On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable de fonction dérivée continue. Montrer que si la fonction f s'annule une infinité de fois alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html