Question de cours. Soit u une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$

Exercice. Soit u une suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2, 2], \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

Etudier la bonne définition et la limite éventuelle de la suite u. Une fois la limite possible ℓ obtenue, on pourra étudier la suite $|u - \ell|$.

Réponse. Pour tout $x \in [-2, 2]$, nous avons $2 - x \in [0, 4]$ et $\sqrt{2 - x} \in [0, 2]$. Par conséquent la suite u est bien définie. Si la suite u converge vers $\ell \in [0, 2]$ alors, par continuité,

$$\ell = \sqrt{2 - \ell}.$$

Dans ce cas

$$0 = \ell^2 + \ell - 2 = (\ell - 1)(\ell + 2)$$

i.e. $\ell = 1$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{n+1} - 1| = |\sqrt{2 - u_n} - 1| = \left| \frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2 - u_n} + 1} \right| = \frac{|u_n - 1|}{\sqrt{2 - u_n} + 1} \leq |u_n - 1|.$$

Donc la suite $|u - 1|$ est décroissante et minorée par 0. Ainsi elle converge vers $\ell_0 \in \mathbb{R}_+$. Si $\ell_0 > 0$ alors

$$\sqrt{2 - u_n} + 1 = \frac{|u_n - 1|}{|u_{n+1} - 1|} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

i.e.

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

ce qui est absurde. Par conséquent $\ell_0 = 0$ i.e. $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice. On considère une suite u réelle et les suites a et b définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \inf_{k \geq n} u_k, \quad b_n = \sup_{k \geq n} u_k.$$

1. Montrer que les suites a et b convergent. On note $\liminf u$ et $\limsup u$ leurs limites.
2. Montrer que la suite u converge si et seulement si $\liminf u = \limsup u$.

Réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons
$$a_{n+1} \geq a_n, \quad b_{n+1} \leq b_n.$$
Donc la suite a est décroissante et la suite b croissante. De plus la suite u est bornée par $M \in \mathbb{R}_+$, donc les suites a et b sont bornées par M également. Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, les suites a et b sont convergentes.

2. On procède par double implications.
   - On suppose que la suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell\varepsilon.$$
   Donc
   $$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon.$$
   Ainsi les suites a et b convergent vers ℓ.

- Réciproquement on suppose que $\liminf u = \limsup u =: \ell$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$\forall n \geq N_1, \quad \inf_{k \geq n} \geq \ell - \varepsilon$$

  et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$\forall n \geq N_2, \quad \sup_{k \geq n} \leq \ell + \varepsilon.$$

  Donc, en considérant $N = \max(N_1, N_2)$, nous obtenons

  $$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon.$$

  Donc la suite u est convergente.

Question de cours. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = x_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

1. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\arctan(x)).$$

Exercice. On considère les suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

En étudiant la suite $w = u + iv$, montrer que les suites u et v convergent et déterminer leurs limites.

Réponse. On considère la suite w définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + iv_n.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + iv_{n+1} \\ &= \frac{u_n + v_n}{2} + i\frac{u_n - v_n}{2} \\ &= \frac{(1+i)u_n + (1-i)v_n}{2} \\ &= \frac{(1+i)u_n - (1+i)iv_n}{2} \\ &= \frac{1+i}{2}\overline{w_n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_{n+1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_n|.$$

Par conséquent, par suite géométrique,

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De suite

$$u_n = \mathrm{Re}(w_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$v_n = \mathrm{Im}(w_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice. On considère une suite r de rationnels strictement positifs que l'on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n, q_n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que si $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alors $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On pourra raisonner par l'absurde par rapport à la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Réponse. On suppose par l'absurde que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $+\infty$. Alors il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que

$$q_n \leq A.$$

Ainsi il existe une suite extraite $(q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de q qui soit bornée (par A). Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$q_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q.$$

Or il s'agit d'une suite d'entiers convergente, donc elle est constante à partir d'un certain rang. De plus nous avons

$$p_{\varphi(\psi(n))} = r_{\varphi(\psi(n))} q_{\varphi(\psi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} rq.$$

Or de même il s'agit d'une suite d'entiers convergente, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Ainsi, en considérant n_0 le maximum des deux certains rangs, nous obtenons

$$r = \frac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde car $r \notin \mathbb{Q}$. Par conséquent $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Puis

$$p_n = r_n q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Question de cours. Soit $u \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$.

Exercice. On considère la suite réelle u définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

Etudier la limite éventuelle de la suite u.

Réponse. On étudie la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - 1 - x.$$

Alors la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1.$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(0) = 0$. En particulier la fonction g est positive. Donc la suite u est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1 = g(u_n) + u_n \geq 0 + u_n = u_n.$$

Si la suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors, par continuité, $g(\ell) = 0$ i.e. $\ell = 0$.

- Si $u_0 = 0$ alors $u = 0$ converge vers 0.
- Si $u_0 > 0$ alors la suite u est croissante et ne peut pas être majorée donc diverge vers $+\infty$.
- Si $u_0 < 0$ alors la suite u est croissante et majorée par 0 donc converge vers 0 la seule limite possible.

Exercice. Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ 1-lipschizienne. On considère la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{f(u_n) + u_n}{2}.$$

Montrer que la suite u converge vers un point fixe de f.

Réponse. On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \frac{f(x) + x}{2}.$$

Alors, pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) \in \left[\frac{a+a}{2}, \frac{b+b}{2}\right] = [a, b].$$

Donc la fonction g est à valeurs dans $[a, b]$. Ainsi la suite u est bornée.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{f(u_n) - f(u_{n-1}) + u_n - u_{n-1}}{2}.$$

Donc, par 1-lipschitziennité,

$$u_{n+1} - u_n \in \left[\frac{-|u_n - u_{n-1}| + u_n - u_{n-1}}{2}, \frac{|u_n - u_{n-1}| + u_n - u_{n-1}}{2}\right].$$

Donc

- Si $u_n - u_{n-1} \geq 0$ alors
$$u_{n+1} - u_n \geq \frac{-|u_n - u_{n-1}| + u_n - u_{n-1}}{2} = 0.$$
- Si $u_n - u_{n-1} \leq 0$ alors
$$u_{n+1} - u_n \leq \frac{|u_n - u_{n-1}| + u_n - u_{n-1}}{2} = 0.$$

Ainsi la suite u est monotone.

Par conséquent la suite u converge vers $\ell \in [a, b]$. Donc, par continuité,

$$\ell = \frac{f(\ell) + \ell}{2}$$

i.e.

$$\ell = f(\ell).$$

Ainsi la suite u converge vers un point fixe de la fonction f.