Question de cours. Soit u une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$

Exercice. Soit u une suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2, 2], \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

Etudier la bonne définition et la limite éventuelle de la suite u. Une fois la limite possible ℓ obtenue, on pourra étudier la suite $|u - \ell|$.

Exercice. On considère une suite u réelle et les suites a et b définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \inf_{k \geq n} u_k, \quad b_n = \sup_{k \geq n} u_k.$$

1. Montrer que les suites a et b convergent. On note $\liminf u$ et $\limsup u$ leurs limites.
2. Montrer que la suite u converge si et seulement si $\liminf u = \limsup u$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = x_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

1. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\arctan(x)).$$

Exercice. On considère les suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

En étudiant la suite $w = u + iv$, montrer que les suites u et v convergent et déterminer leurs limites.

Exercice. On considère une suite r de rationnels strictement positifs que l'on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n, q_n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que si $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alors $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On pourra raisonner par l'absurde par rapport à la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Soit $u \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$.

Exercice. On considère la suite réelle u définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

Etudier la limite éventuelle de la suite u.

Exercice. Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ 1-lipschizienne. On considère la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{f(u_n) + u_n}{2}.$$

Montrer que la suite u converge vers un point fixe de f.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html