Question de cours.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 5 & [6] \\ x & \equiv & 4 & [8] \end{array} \right.$$

   n'admet pas de solution x dans $\mathbb{Z}$.

2. (a) Enoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Soient $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$a \mid c,\ b \mid c \quad \Longleftrightarrow \quad ab \mid c.$$

3. On considère le système d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 6 & [17] \\ x & \equiv & 5 & [16] \\ x & \equiv & 4 & [15] \end{array} \right.$$

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   (b) En déduire la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p : & \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ & z & \longmapsto & z^p \end{array}$$

où $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Montrer que φ_p est bijective si et seulement si $p \wedge n = 1$.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$xy = 3x + 2y.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours.

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer que
$$p \wedge a = 1 = p \wedge b \quad \Longrightarrow \quad p \wedge (ab) = 1.$$

2. Soit p un nombre premier.

   (a) Montrer que
   $$\forall k \in \{1, ..., p-1\}, \quad p \mid \binom{p}{k} k!.$$
   En déduire que
   $$p \mid \binom{p}{k}.$$

   (b) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^p \equiv n \ [p].$$

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si p ne divise pas n alors $n^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant
$$\begin{cases} x + y &= 100 \\ x \wedge y &= 10. \end{cases}$$

Exercice.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n^2 - 2b_n^2$ et en déduire que $a_n \wedge b_n = 1$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours.

1. Enoncer et démontrer le lemme de Gauss.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^6, 2^8$ et 2^{12} par 7.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}.$$

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$(a+b) \wedge (ab) = 1 \quad \iff \quad a \wedge b = 1.$$

Exercice. Déterminer les triplets $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que

$$a \vee b = 42, \quad a \wedge c = 3, \quad a + b + c = 29.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html