Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Réponse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On procède par analyse-synthèse.

- On suppose qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ telles que
$$M = S + A.$$
Alors
$$M^T = S^T + A^T = S - A.$$
Donc, en effectuant la demi-somme et la demi-différence des deux équations précédentes, nous obtenons
$$S = \frac{M + M^T}{2}, \quad A = \frac{M - M^T}{2}.$$
Ce qui montre l'unicité d'une telle décomposition.
- Réciproquement on considère
$$S = \frac{M + M^T}{2}, \quad A = \frac{M - M^T}{2}.$$
Alors
$$S + A = M, \quad S^T = S, \quad A^T = -A.$$
Ce qui montre l'existence d'une telle décomposition.

Exercice. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction des matrices I_3, A et A^2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction des matrices I_3, A et A^2.

Réponse.

1. Nous avons
$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
puis
$$(A + I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Comme $AI_3 = I_3A$, d'après la formule du binôme de Newton, nous avons
$$0_{n,n} = (A + I_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3$$
i.e.
$$A(-A^2 - 3A - 3I_n) = I_n.$$
Donc A est inversible et
$$A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_n.$$

3. Nous avons $A = A + I_3 - I_3$ avec $(A+I_3)(-I_3) = (-I_3)(A+I_3)$. Donc, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A+I_3)^k (-I_n)^{n-k} \\ &= (-1)^n I_n + n(-1)^{n-1}(A+I_3) + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}(A+I_3)^2 + 0_{n,n} + ... \\ &= \left((-1)^n + n(-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^n\right) I_n + \left(n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^n\right) A \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^n A^2 \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}(-1)^n I_n + n(n-2)(-1)^n A + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^n A^2. \end{aligned}$$

Exercice. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X - \mathrm{tr}(X)A = B.$$

Réponse. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X - \mathrm{tr}(X)A = B$. Alors, en appliquant la trace nous obtenons

$$(1 - \mathrm{tr}(A))\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(B).$$

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$ alors $\mathrm{tr}(X) = \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1 - \mathrm{tr}(A)}$ puis

  $$X = \mathrm{tr}(X)A + B = \frac{\mathrm{tr}(B)}{1 - \mathrm{tr}(A)}A + B.$$

  Il s'agit bien d'une solution de l'équation donc c'est la seule.

- Si $\mathrm{tr}(A) = 1$ alors nous obtenons avec l'équation précédente $0 = \mathrm{tr}(B)$.
  - Si $\mathrm{tr}(B) \neq 0$ alors l'équation n'admet pas de solution.
  - Si $\mathrm{tr}(B) = 0$ alors

    $$X = \mathrm{tr}(X)A + B = \lambda A + B$$

    avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \lambda A + B$, nous avons

    $$X - \mathrm{tr}(X)A = \lambda A + B - \lambda \mathrm{tr}(A)A - \mathrm{tr}(B)A = \lambda A + B - \lambda A - 0 = B.$$

    Donc l'ensemble des solutions est

    $$\mathbb{R}A + B.$$

Exercice. Calculer de deux manières différentes A^m où $m \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse.

1. On remarque que $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier $I_3 N = N I_3$, donc, par formule du binôme de Newton,
$$A^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N^k.$$
Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout entier $k \geq 3$. Donc
$$A^m = I_3 + mN + \frac{m(m-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & m & m + \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m+1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On remarque que
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
puis
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Autrement dit nous pouvons montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que
$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m+1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - L'initialisation pour $m = 0$ ou $m = 1$ est directe.
   - On suppose que, pour $m \in \mathbb{N}$,
   $$A^m = \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m+1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Alors
   $$A^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1+m+\frac{m(m+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+m & \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ 0 & 1 & 1+m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice A est antisymétrique si et seulement si
$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X = 0.$$

Réponse. On procède par double implications.

- On suppose que la matrice A est antisymétrique. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors, comme $X^T A X \in \mathbb{R}$,
$$X^T A X = (X^T A X)^T = X^T A^T X = -X^T A X.$$
Donc $X^T A X = 0$.

- Réciproquement on suppose que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X = 0.$$

Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$. Alors

$$0 = (E_i + E_j)^T A (E_i + E_j) = E_i^T A E_i + E_i^T A E_j + E_j^T A E_i + E_j^T A E_j = 0 + A_{ij} + A_{ji} + 0.$$

Donc $A_{ij} = -A_{ji}$. Ainsi A est antisymétrique.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer son inverse à partir de ce calcul.
2. On considère un entier $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Réponse.

1. Nous avons, après calculs,

$$A^2 - 3A + 2I_2 = 0_{n,n}$$

i.e.

$$A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\right) = I_2.$$

Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons, par théorème de la division euclidienne, l'existence de $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R, \quad \deg(R) < 2.$$

En particulier $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc, en évaluant en 1 et 2 qui sont les racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$,

$$1 = a + b, \quad 2^n = 2a + b.$$

Donc

$$a = 2^n - 1, \quad b = 2 - 2^n.$$

Ainsi

$$R = (2^n - 1)X + 2 - 2^n.$$

3. Nous avons alors

$$A^n = (A^2 - 3A + 2I_2)Q(A) + R(A) = 0_{n,n} + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2.$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Réponse.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ji}A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} [BA]_{jj} \\ &= \mathrm{tr}(BA). \end{aligned}$$

2. On suppose par l'absurde qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$. Alors, par linéarité de l'application trace et la question précédente,

$$n = \mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

ce qui est absurde. Par conséquent il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Réponse. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire inférieure par blocs, donc nous cherchons M de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & bc+cd & d^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir $a = 1$ et b, c, d doivent vérifier le système

$$b^2 = 4, \quad d^2 = 9, \quad c(b+d) = 1.$$

Par exemple si $b = -2, d = 3$ et $c = 1$. Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.
2. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice nilpotente. Cette décomposition est-elle unique ? (On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_{n,n}$.)

Réponse.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On procède par analyse-synthèse.
   - On suppose qu'il existe $S, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que S soit symétrique, T triangulaire supérieure à diagonale nulle et $M = S + T$. Alors, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, si $i \geq j$ alors
   $$m_{ij} = s_{ij} + 0 = s_{ij}.$$
   Puis, si $i < j$
   $$m_{ij} = s_{ij} + t_{ij} = -s_{ji} + t_{ij} = -m_{ji} + t_{ij}$$
   i.e.
   $$t_{ij} = m_{ij} + m_{ji}.$$
   - Réciproquement on considère les matrices S et T définies par, pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$,
   $$s_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{si} \quad i \geq j \\ m_{ji} & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$
   et
   $$t_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ m_{ij} - m_{ji} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$
   Ainsi S est symétrie, T triangulaire supérieure et $M = S + T$.
2. Soit $M = S + T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ décomposée comme précédemment. Alors, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i + 1 \geq j$,
$$[T^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} T_{ik} T_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} T_{ik} T_{kj}$$
avec, pour tout $k \leq i, T_{ik} = 0$ et pour tout $k \geq i + 1 \geq j, T_{kj} = 0$. Donc T^2 est triangulaire supérieure de diagonale et sur-diagonale nulles. Ainsi, par itérations successives, pour tout $m \in \{1, ..., n\}$, la matrice T^m est triangulaire supérieure de diagonale nulle, de sur-diagonale nulle, de sur-sur-diagonale nulle, jusqu'à sa $m - 1$-ième sur-diagonale. En particulier $T^n = 0_{n,n}$. Donc T est nilpotente. Par contre la décomposition n'est pas unique car de la même manière toute matrice peut se décomposer en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice triangulaire inférieure de diagonale nulle. Cette dernière est nilpotente comme précédemment mais n'est pas égale en général à T.