Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction des matrices I_3, A et A^2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction des matrices I_3, A et A^2.

Exercice. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X - \mathrm{tr}(X)A = B.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. Calculer de deux manières différentes A^m où $m \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice A est antisymétrique si et seulement si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X = 0.$$

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer son inverse à partir de ce calcul.
2. On considère un entier $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

2. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice nilpotente. Cette décomposition est-elle unique ? (On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_{n,n}$.)

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2425.html