Question de cours. Montrer que deux fonctions sur un intervalle I qui coïncident sur une partie $\mathcal{D}$ dense dans I sont égales sur I.

Question de cours.

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Montrer que si la fonction f' admet une limite finie ℓ en x_0 alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
3. Montrer que l'assertion "si la fonction f est dérivable en x_0 alors la fonction f' admet une limite finie en x_0" est fausse. Indication : On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Réponse.

1.
2. On suppose que la fonction f' admet une limite ℓ en x_0.
   - On commence par le cas où $\ell = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$,
   $$|x - x_0| \leq \delta \implies |f'(x)| \leq \varepsilon.$$
   Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in [a, b]$,
   $$|x - x_0| \leq \delta \quad \Longleftarrow \quad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \varepsilon.$$
   Donc la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
   - Maintenant pour le cas général on considère la fonction g définie par
   $$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - x\ell.$$
   Ainsi la fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$ et vérifie que
   $$g'(x) = f'(x) - \ell \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$
   Donc, d'après le point précédent, la fonction g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = 0$. Puis la fonction f également et $f'(x_0) = g'(x_0) + \ell = \ell$.
3. Nous avons
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   Donc la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Mais, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   qui n'admet pas de limite en 0. Donc la fonction f' n'est pas continue en 0.

Exercice. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\arctan(x)).$$

Réponse. On procède par analyse-synthèse.

- On considère une fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = x$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \arctan(x_n).$$
Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = f(\arctan(x_n)) = f(x_{n+1}).$$
Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x_0) = f(x)$. De plus
$$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
En effet :

- $\star$ Si $x \geq 0$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante car

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \arctan(t) \leq t.$$

Donc, par théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Puis, par continuité de la fonction arctan, nous obtenons $\ell = \arctan(\ell)$ i.e. $\ell = 0$ par étude de fonction.

- $\star$ De même si $x < 0$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et croissante, puis convergente vers 0.

Par conséquent nous obtenons par continuité de la fonction f en 0 :

$$f(x) = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Donc $f(x) = f(0)$. Autrement dit la fonction f est constante.

- Réciproquement les fonctions constantes vérifient bien les conditions de l'énoncé.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$f(t) + f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On pourra écrire la fonction f comme la solution d'une équation différentielle.

Réponse. On considère la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = f(t) + f'(t).$$

Alors la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = g$$

de solutions de l'équation homogène $y_h(t) = \lambda e^{-t}, t \in \mathbb{R}_+$. On applique la méthode de variation de la constante. On considère $\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ et $y(t) = \lambda(t)e^{-t}, t \in \mathbb{R}_+$. Alors la fonction y est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad -\lambda'(t)e^{-t} = g(t).$$

Par exemple si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda(t) = -\int_0^t g(s)e^s ds.$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \left(\lambda - \int_0^t g(s)e^s ds\right) e^{-t}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Or $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geq t_0, |g(t)| \leq \varepsilon$. Nous avons

$$\left|\int_0^t g(s)e^s ds e^{-t}\right| = \int_0^{t_0} g(s)e^s ds e^{-t} + \int_{t_0}^t g(s)e^s ds e^{-t}$$

avec directement

$$\int_0^{t_0} g(s)e^s ds e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\left|\int_{t_0}^t g(s)e^s ds e^{-t}\right| \leq \varepsilon e^{-t} \int_{t_0}^t e^s ds = \varepsilon e^{-t}(e^t - e^{t_0}) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, en revenant à l'égalité vérifiée par la fonction f nous obtenons la convergence souhaitée.

Question de cours. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Réponse. On procède par analyse-synthèse.

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

En particulier $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$. Puis on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1).$$

  - Pour $n = 0$ nous avons bien $f(0) = 0 = 0 \times f(1)$.
  - On suppose que $f(n) = nf(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1).$$

Le théorème de récurrence permet donc de conclure. Maintenant pour $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$0 = f(0) = f(n-n) = f(n) + f(-n).$$

Donc $f(-n) = -f(n)$. Par conséquent, d'après ce qui précède, si $n \geq 0$ alors $f(n) = nf(1)$, et si $n < 0$ alors

$$f(n) = f(-(-n)) = -f(-n) = -(-n)f(1) = nf(1).$$

Maintenant pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, nous avons, par une récurrence similaire,

$$f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right),$$

d'où

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) = \frac{p}{q}f(1).$$

Par conséquent les fonctions f et $x \longmapsto xf(1)$ coïncident sur $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xf(1).$$

- Réciproquement les fonctions linéaires $x \longmapsto ax$ vérifient bien l'égalité souhaitée.

Question de cours. Enoncer et démontrer l'ingalité de Jensen.

Exercice. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Réponse. On procède par analyse-synthèse.

- On considère une fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors la fonction f' est dérivable par composée de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (f')'(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f(x).$$

Donc la fonction f vérifie l'équation différentielle homogène

$$y'' + y = 0$$

de solutions données par

$$y(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) &= f'(x) \\ &= f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \lambda\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \mu\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \lambda\sin(x) + \mu\cos(x). \end{aligned}$$

Donc $\lambda = 0$ et

$$f(x) = \mu\sin(x).$$

- Réciproquement les fonctions de la forme précédente vérifient bien les conditions de l'énoncé.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $|f(x)| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. L'image réciproque de toute bornée de $\mathbb{R}$ par l'application f est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Réponse. On procède par double implications.

- On suppose que $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $|f(x)| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}$. On suppose par l'absurde que $f^{-1}(B)$ n'est pas bornée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in f^{-1}(B)$ tel que $|x_n| > n$. Ainsi $f(x_n) \in B$ et $|x_n| > n$. Or la partie B est bornée, disons par $M \in \mathbb{R}_+^*$. Donc

  $$|f(x_n)| \leq M, \quad |x_n| > n.$$

  Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positif à partir d'un certain rang alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où, par hypothèse et caractérisation séquentielle de la limite,

  $$|f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  ce qui est absurde d'après $|f(x_n)| \leq M$. Et sinon pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n < 0$. Ainsi on peut construire une extraction $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ négative, d'où $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, d'où

  $$|f(x_{\varphi(n)})| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  ce qui est encore absurde.

- Réciproquement on suppose que l'image réciproque de toute bornée de $\mathbb{R}$ par l'application f est une partie bornée de $\mathbb{R}$. On suppose par l'absurde que $\lim_{+\infty} |f| \neq +\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \geq x_0$ et $|f(x)| \leq A$. Ainsi la partie $f^{-1}([-A, A])$ n'est pas bornée alors $[-A, A]$ l'est : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \geq x_0$ tel que $x \in f^{-1}([-A, A])$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction. On procède de même pour montrer que $\lim_{-\infty} |f| = +\infty$.

On aurait également pu les rédiger par contraposée.

Question de cours. On considère une fonction réelle f continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et admettant des limites finies en a et b. Montrer que la fonction f est bornée sur $]a, b[$. Montrer que cela reste vrai pour $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Réponse. Comme la fonction f admet des limites finies ℓ^a et ℓ^b en a et b, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$,

$$x < a + \delta \Longrightarrow \ell^a - 1 \leq f(x) \leq \ell^a + 1$$

et

$$x > b - \delta \Longrightarrow \ell^b - 1 \leq f(x) \leq \ell^b + 1.$$

Ainsi la fonction f est bornée sur $]a, a + \delta[$ et sur $]b - \delta, b[$. De plus la fonction f est continue sur le segment $[a + \delta, b - \delta]$ donc y est bornée. Par conséquent la fonction f est bornée sur tout l'intervalle $]a, b[$. On procède de façon similaire pour $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Question de cours.

1. On considère les fonctions g et h définies par, avec x dans leur ensemble de définition,

$$g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = \frac{1}{1+x}.$$

   Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On considère la fonction f définie par, avec x dans son ensemble de définition,

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

3. Démontrer dans le cas général la formule utilisée dans la question précédente.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geq A$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq \varepsilon.$$

2. En déduire que

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Réponse.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geq A$,

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

   Ainsi

$$\left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - \ell| dt \leq \frac{x - A}{x} \varepsilon \leq \varepsilon.$$

2. On reprend les notations de la question précédente. Nous avons alors

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) - \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt = \frac{1}{x} \int_0^A f(t) dt + \frac{x - A}{x} \ell.$$

   Ainsi, en faisant tendre x vers $+\infty$, nous obtenons la convergence souhaitée.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1.$$

Montrer que la fonction f admet un point fixe.

Réponse. On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Si $f(0) = 0$ alors 0 est un point fixe de la fonction f. Sinon $f(0) > 0$ et dans ce cas

$$g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

De plus, par hypothèse,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell < 1.$$

Or la fonction g est continue par continuité de la fonction f, donc, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(x) = 1$ i.e. $f(x) = x$. Autrement dit x est un point fixe de la fonction f.