Question de cours. Montrer que deux fonctions sur un intervalle I qui coïncident sur une partie $\mathcal{D}$ dense dans I sont égales sur I.

Question de cours.

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \,]a, b[$. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Montrer que si la fonction f' admet une limite finie ℓ en x_0 alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
3. Montrer que l'assertion "si la fonction f est dérivable en x_0 alors la fonction f' admet une limite finie en x_0" est fausse. Indication : On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\arctan(x)).$$

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$f(t) + f'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On pourra écrire la fonction f comme la solution d'une équation différentielle.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Question de cours. Enoncer et démontrer l'ingalité de Jensen.

Exercice. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $|f(x)| \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. L'image réciproque de toute bornée de $\mathbb{R}$ par l'application f est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. On considère une fonction réelle f continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et admettant des limites finies en a et b. Montrer que la fonction f est bornée sur $]a, b[$. Montrer que cela reste vrai pour $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Question de cours.

1. On considère les fonctions g et h définies par, avec x dans leur ensemble de définition,
$$g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = \frac{1}{1+x}.$$
Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On considère la fonction f définie par, avec x dans son ensemble de définition,
$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

3. Démontrer dans le cas général la formule utilisée dans la question précédente.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geq A$,
$$\left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq \varepsilon.$$

2. En déduire que
$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle
$$\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1.$$
Montrer que la fonction f admet un point fixe.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en chercher "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html