Question de cours. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, donner et démontrer $\deg(P+Q)$ ainsi que le cas d'égalité.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Montrer que la fonction $|f|$ est dérivable en x.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
   (a) Montrer que si $f'(x) = 0$ alors la fonction $|f|$ est dérivable en x.
   (b) Montrer que si $f'(x) \neq 0$ alors la fonction $|f|$ n'est pas dérivable en x.
3. Conclure sur le domaine de dérivabilité de la fonction $|f|$. On pourra l'écrire à l'aide d'images réciproques.

Réponse.

1. Quitte à considérer la fonction $-f$, on peut supposer que $f(x) > 0$. Or la fonction f est dérivable en x, en particulier continue, donc il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $y \in [x-\delta, x+\delta]$, $f(y) > 0$. Ainsi
$$\frac{|f(y)| - |f(x)|}{y-x} = \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \underset{y \to x}{\longrightarrow} f'(x).$$
Donc la fonction $|f|$ est dérivable en x et $|f|'(x) = f'(x)$. De même si $f(x) < 0$ alors $|f|'(x) = -f(x)$.
2. (a) Nous avons
$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \underset{y \to x}{\longrightarrow} f'(x) = 0.$$
Donc, par inégalité triangulaire gauche,
$$\left| \frac{|f(y)| - |f(x)|}{y-x} \right| \leq \frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} = \left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \right| \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi la fonction $|f|$ est dérivable en x et $|f|'(x) = 0$.
   (b) Comme $f'(x) \neq 0$, x n'est pas un extremum de la fonction f, et, comme $f(x) = 0$, la fonction f change de signe en x. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall y \in [x-\delta, x[, \quad f(y) < 0$$
et
$$\forall y \in]x, x+\delta], \quad f(y) > 0.$$
Ainsi
$$\frac{|f(y)| - |f(x)|}{y-x} \underset{y \to x-}{\longrightarrow} -f'(x)$$
et
$$\frac{|f(y)| - |f(x)|}{y-x} \underset{y \to x+}{\longrightarrow} f'(x).$$
Donc la fonction $|f|$ admet des dérivées à gauche et à droite différentes, d'où la fonction $|f|$ n'est pas dérivable en x.
3. En conclusion le domaine de dérivation de la fonction $|f|$ est
$$f^{-1}(\mathbb{R}^*) \cup [f^{-1}(\{0\}) \cap (f')^{-1}(\{0\})].$$

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée de classe C^2 tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f''(x) \geq af(x) \geq 0.$$

1. Montrer que la fonction f est décroissante.
2. Déterminer la limite de f' en $+\infty$.
3. Monter que la limite de f en $+\infty$ est nulle.

Réponse.

1. On suppose par l'absurde que la fonction f n'est pas décroissante, donc il existe $a\mathbb{R}_+$ tels que $f'(a) > 0$. Or $f'' \geq 0$, donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+$. En particulier son graphe se situe au dessus de sa tangente en a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a).$$

Donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, comme $f'(a) > 0$, nous obtenons $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ce qui contredit le caractère majorée de la fonction f. Par conséquent la fonction f est croissante.

2. Comme $f'' \geq 0$, la fonction f' est croissante. De plus la fonction f est décroissante d'après la question précédente, donc $f' \leq 0$. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction f' converge en $+\infty$ vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. On suppose par l'absurde que $\ell < 0$. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x > x_0, \quad \frac{\ell}{2} \leq f'(x) \leq \frac{3\ell}{2} < 0.$$

Donc, par théorème des accroissements finis,

$$\forall x > x_0, \quad \exists c(x) \in]x_0, x[, \quad f(x) = f'(c(x))(x-x_0) + f(x_0) \leq \frac{3\ell}{2}(x-x_0) + f(x_0).$$

Donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\lim_{+\infty} f = -\infty$ ce contredit l'hypothèse $f \geq 0$. Par conséquent $\lim_{+\infty} f' = \ell = 0$.

3. La fonction f est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction f converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \quad 0 \leq \frac{\ell}{2} \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2}.$$

Ainsi

$$\forall x \geq x_0, \quad f''(x) \geq af(x) \geq \frac{a\ell}{2} > 0.$$

Donc

$$\forall x \geq x_0, \quad f'(x) - f'(x_0) = \int_{x_0}^{x} f''(t)dt \geq \frac{a\ell}{2}(x-x_0).$$

Ainsi, en faisant tendre x vers $+\infty$, nous obtenons $\lim_{+\infty} f' = +\infty$ ce qui est absurde. Par conséquent $\lim_{+\infty} f = 0$.

Question de cours. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, donner et démontrer $\deg(PQ)$ ainsi que le cas d'égalité.

Exercice. On considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$ telle que

$$f(a) = 0, \quad f(b)f'(b) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Réponse. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f(b) > 0$ et $f'(b) < 0$. Alors il existe $b' \in [a,b[$ tel que $f(b') > f(b) > 0$. Puis, d'après le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b', il existe $b'' \in \,]a,b'[$ tel que $f(b'') = f(b)$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]b'', b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice. On considère deux fonctions $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que, pour tout $x \in]a,b[, g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [a,b[, g(x) \neq g(b)$.
2. Soient $t \in [a,b[, p = \dfrac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}$ et
$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) = f(x) - pg(x).$$
Montrer que $h(b) = h(t)$ et en déduire qu'il existe $c(t) \in \,]a,b[$ tel que
$$\frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)} = \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))}.$$
3. On suppose que $\lim_{x \to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que
$$\frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)} \underset{t \to b-}{\longrightarrow} \ell.$$
4. Déterminer la limite $\lim_{x \to 0-} \dfrac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Réponse.

1. On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in [a,b[$ tel que $g(x) = g(b)$. Alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $y \in \,]x,b[$ tel que $g'(y) = 0$ ce qui est absurde. Donc, pour tout $x \in [a,b[, g(x) \neq g(b)$.
2. Nous avons
$$h(b) = f(b) - \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}g(b) = \frac{(g(t)-g(b))f(b) - (f(t)-f(b))g(b)}{g(t)-g(b)} = \frac{g(t)f(b) - f(t)g(b)}{g(t)-g(b)}$$
et
$$h(t) = f(t) - \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}g(t) = \frac{(g(t)-g(b))f(t) - (f(t)-f(b))g(t)}{g(t)-g(b)} = \frac{-g(b)f(t) + f(b)g(t)}{g(t)-g(b)}.$$
Donc $h(b) = h(t)$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c(t) \in \,]t,b[$ tel que $h'(c(t)) = 0$. Or, pour tout $x \in \,]a,b[$,
$$h'(x) = f'(x) - pg'(x).$$
Donc, comme $g'(c(t)) \neq 0$ par hypothèse,
$$\frac{f'(c(t))}{g'(c(t))} = p = \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}.$$
3. Nous avons $c(t) \underset{t \to b-}{\longrightarrow} b$ par théorème des gendarmes. Donc
$$\ell = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \to b-} \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))} = \lim_{t \to b-} \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}.$$

4. On considère les fonction f et g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) - e^x, \quad g(x) = (x+1)e^x.$$

Alors les fonctions f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in [-1, 0], \quad g'(x) = (x+2)e^x.$$

Donc

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin(x) - e^x}{(x+2)e^x} \underset{x \to 0-}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \underset{x \to 0-}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de Taylor sur les polynômes.

Exercice. On considère les fonctions f et g définies par

$$\forall x \in [1, e], \quad f(x) = \frac{2x}{\ln(x) + 1}$$

et

$$\forall y \in [0, 1], \quad g(y) = \frac{2y}{(1 + y)^2}.$$

1. Montrer que
$$\forall y \in [0, 1], \quad 0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}.$$
2. Montrer que l'intervalle $[1, e]$ est stable par la fonction f.
3. Montrer que la fonction f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne i.e.
$$\forall x, y \in [1, e], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leq \frac{e - 1}{2^n}$$
et en déduire la limite de la suite.

Réponse.

1. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et
$$\forall y \in [0, 1], \quad g'(y) = \frac{2(1 + y)^2 - 2(1 + y)2y}{(1 + y)^4} = \frac{-2y^2 + 2}{(1 + y)^4} = 2\frac{1 - y^2}{(1 + y)^4} \geq 0.$$
Donc la fonction g est croissante sur $[0, 1]$ et
$$\forall y \in [0, 1], \quad g(y) \in [g(0), g(1)] = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$
2. La fonction f est dérivable sur $[1, e]$ et
$$\forall x \in [1, e], \quad f'(x) = \frac{2(\ln(x) + 1) - 2}{(\ln(x) + 1)^2} = 2\frac{\ln(x)}{(\ln(x) + 1)^2} \geq 0.$$
Donc la fonction f est croissante sur $[1, e]$ et
$$\forall x \in [1, e], \quad f(x) \in [f(1), f(e)] = [2, e] \subset [1, e].$$
3. Soient $x, y \in [1, e]$. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis,
$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{[x,y]} |f'||x - y|.$$
Or, d'après les questions précédentes,
$$\forall z \in [x, y], \quad f'(z) = g(\ln(z)) \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$
Donc
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que
$$|u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$
Pour $n = 0$ nous avons directement $|u_0 - e| = e - 1 = \dfrac{e-1}{2^0}$. On suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence,
$$|u_{n+1} - e| = |f(u_n) - f(e)| \leq \frac{1}{2}|u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^{n+1}}.$$
Le théorème de récurrence permet de conclure. Par conséquent, par théorème des gendarmes, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ avec une vitesse en $\dfrac{1}{2^n}$.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$. Déterminer $s \in [0,1]$ dépendant de x, y, t tel que
$$\frac{1}{(1-t)x + ty} = (1-s)X + sY,$$
avec $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$. Déterminer également l'expression de t en fonction de s, X, Y.
2. En déduire que la fonction $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est convexe si et seulement si la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe.

Réponse.

1. Nous avons en effet
$$\frac{1}{(1-t)x+ty} = \frac{1-t+t}{(1-t)x+ty} = \frac{1-t}{(1-t)x+ty} + \frac{t}{(1-t)x+ty} = \frac{(1-t)x}{(1-t)x+ty}\frac{1}{x} + \frac{ty}{(1-t)x+ty}\frac{1}{y}.$$
Donc, en considérant $s = \dfrac{ty}{(1-t)x+ty}$, nous avons bien
$$1 - s = \frac{(1-t)x + ty - ty}{(1-t)x+ty} = \frac{(1-t)x}{(1-t)x+ty},$$
et
$$\frac{1}{(1-t)x+ty} = (1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y} = (1-s)X + sY.$$
De plus nous avons après résolution
$$t = \frac{sx}{sx + (1-s)y} = \frac{\dfrac{s}{X}}{\dfrac{s}{X} + \dfrac{1-s}{Y}} = \frac{sY}{(1-s)X + sY}.$$
2. On suppose que la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$. On considère s, X, Y comme à la question précédente. Alors
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right) &= \frac{1}{(1-s)X+sY}((1-s)X+sY)f((1-s)X+sY) \\ &\leq \frac{1}{(1-s)X+sY}((1-s)Xf(X)+sYf(Y)) = (1-t)f\left(\frac{1}{x}\right) + tf\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$
Donc la fonction $f\left(\dfrac{1}{\cdot}\right)$ est convexe. Réciproquement on suppose que la fonction $f\left(\dfrac{1}{\cdot}\right)$ est convexe. Soit $X, Y \in \mathbb{R}_+^*$ et $s \in [0,1]$. On pose alors $x = \dfrac{1}{X}, y = \dfrac{1}{Y}$ et $t = \dfrac{sx}{sx+(1-s)y}$ pour avoir $s = \dfrac{ty}{(1-t)x+ty}$. Ainsi
$$((1-s)X+sY)f\left((1-s)X+sY\right) = \frac{1}{(1-t)x+ty}f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right).$$

Puis, par convexité de la fonction $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ et $\frac{1}{(1-t)x+ty} \geq 0$,

$$((1-s)X+sY)f\left((1-s)X+sY\right) \leq \frac{1}{(1-t)x+ty}\left((1-t)f\left(\frac{1}{x}\right)+tf\left(\frac{1}{y}\right)\right) = (1-s)f\left(\frac{1}{x}\right)+sf\left(\frac{1}{y}\right).$$

Donc la fonction $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ est convexe.