Question de cours. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, donner et démontrer $\deg(P+Q)$ ainsi que le cas d'égalité.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Montrer que la fonction $|f|$ est dérivable en x.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
   (a) Montrer que si $f'(x) = 0$ alors la fonction $|f|$ est dérivable en x.
   (b) Montrer que si $f'(x) \neq 0$ alors la fonction $|f|$ n'est pas dérivable en x.
3. Conclure sur le domaine de dérivabilité de la fonction $|f|$. On pourra l'écrire à l'aide d'images réciproques.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée de classe C^2 tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f''(x) \geq af(x) \geq 0.$$

1. Montrer que la fonction f est décroissante.
2. Déterminer la limite de f' en $+\infty$.
3. Monter que la limite de f en $+\infty$ est nulle.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, donner et démontrer $\deg(PQ)$ ainsi que le cas d'égalité.

Exercice. On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b[$ telle que

$$f(a) = 0, \quad f(b)f'(b) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice. On considère deux fonctions $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que, pour tout $x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [a, b[, g(x) \neq g(b)$.
2. Soient $t \in [a, b[, p = \dfrac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)}$ et
$$\forall x \in [a, b], \quad h(x) = f(x) - pg(x).$$
Montrer que $h(b) = h(t)$ et en déduire qu'il existe $c(t) \in\ ]a, b[$ tel que
$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))}.$$
3. On suppose que $\lim_{x \to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que
$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \underset{t \to b-}{\longrightarrow} \ell.$$
4. Déterminer la limite $\lim_{x \to 0-} \dfrac{\cos(x) - e^x}{(x + 1)e^x - 1}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de Taylor sur les polynômes.

Exercice. On considère les fonctions f et g définies par

$$\forall x \in [1, e], \quad f(x) = \frac{2x}{\ln(x) + 1}$$

et

$$\forall y \in [0, 1], \quad g(y) = \frac{2y}{(1+y)^2}.$$

1. Montrer que

$$\forall y \in [0, 1], \quad 0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}.$$

2. Montrer que l'intervalle $[1, e]$ est stable par la fonction f.

3. Montrer que la fonction f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne i.e.

$$\forall x, y \in [1, e], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^n}$$

et en déduire la limite de la suite.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0, 1]$. Déterminer $s \in [0, 1]$ dépendant de x, y, t tel que

$$\frac{1}{(1-t)x + ty} = (1-s)X + sY,$$

avec $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$. Déterminer également l'expression de t en fonction de s, X, Y.

2. En déduire que la fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe si et seulement si la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html