Question de cours. A l'aide d'un polynôme, montrer que, pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

Réponse. On considère le polynôme $P = (X+1)^{n+m}$. Alors, d'après la formule du binôme de Newton,

$$P = \sum_{p=0}^{n+m} \binom{n+m}{p} X^p$$

et, par produit de Cauchy

$$P = (X+1)^n (X+1)^m = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} X^\ell \right) = \sum_{p=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} \right) X^p.$$

Donc, par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

Question de cours. Résoudre sur $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P$.

Réponse. Le polynôme nul $P = 0$ vérifie bien l'équation souhaitée. Maintenant soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(X^2) = (X^2+1)P$. Alors

$$2\deg(P) = 2 + \deg(P)$$

i.e. $\deg(P) = 2$. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Donc

$$aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c.$$

Ainsi $b = 0$ et $a + c = 0$, d'où

$$P = aX^2 - a = a(X-1)(X+1).$$

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, le polynôme $P = a(X-1)(X+1)$ vérifie

$$(X^2+1)P = a(X^2+1)(X-1)(X+1) = a(X^2+1)(X^2-1) = P(X^2).$$

Exercice. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X \mid P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X \mid P \circ P - X$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P^{[n]} = P \circ \cdots \circ P$ le polynôme obtenu par composition n fois du polynôme P. Montrer que $P - X \mid P^{[n]} - X$.

Réponse.

1. On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \cdots, a_d \in \mathbb{K}$. Alors

   $$P \circ P - P = \sum_{k=0}^{d} a_k P^k - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k (P^k - X^k)$$

   avec, pour tout $k \in \{0, \cdots, d\}$,

   $$P^k - X^k = (P - X) \sum_{\ell=0}^{k-1} P^\ell X^{k-\ell-1}$$

   divisible par $P - X$. Donc $P - X \mid P \circ P - P$.

2. Nous avons
$$P \circ P - X = P \circ P - P + P - X$$
avec $P - X \mid P \circ P - P$ d'après ce qui précède et $P - X \mid P - X$. Donc, par somme, $P - X \mid P \circ P - X$.

3. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ nous avons directement l'initialisation. On suppose que $P - X \mid P^{[n]} - X$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la question 2 appliquée au polynôme $P^{[n]}$, nous avons $P^{[n]} - X \mid P^{[n+1]} - X$. Par conséquent, par transitivité, $P - X \mid P^{[n+1]} - X$.

Exercice. On considère les polynômes $A = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X - 3$.

1. Déterminer le quotient Q et le reste R dans la division euclidienne de A par B.
2. Déterminer leur PGCD $A \wedge B$.
3. Déterminer une identité de Bézout entre A et B.

Réponse.

1. On effectue la division euclidienne de A par B :
$$A = B(2X - 1) - 2X^2 + 6X - 4.$$
Donc $Q = 2X - 1$ et $R = -2X^3 + 6X - 4$.

2. On effectue la division euclidienne de B par R :
$$B = R\left(-\frac{1}{2}X - 2\right) + 11X - 11.$$
Puis on effectue la division euclidienne de R par $11X - 11$:
$$-2X^3 + 6X - 4 = (11X - 11)\left(-\frac{2}{11}X + \frac{4}{11}\right) + 0.$$
Ainsi un PGCD de A et B est le dernier reste non nul $11X - 11$. Ainsi le PGCD est donné par
$$A \wedge B = X - 1.$$

3. Nous avons
$$\begin{aligned}
A \wedge B &= X - 1 \\
&= \frac{1}{11}(11X - 11) \\
&= \frac{1}{11}\left(B - R\left(-\frac{1}{2}X - 2\right)\right) \\
&= \frac{1}{11}\left(B - (A - B(2X - 1))\left(-\frac{1}{2}X - 2\right)\right) \\
&= \frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}X + 2\right)A + \frac{1}{11}\left(1 + (2X - 1)\left(-\frac{1}{2}X - 2\right)\right)B \\
&= \left(\frac{1}{22}X + \frac{2}{11}\right)A + \left(-\frac{1}{11}X^2 - \frac{7}{22}X + \frac{3}{11}\right)B
\end{aligned}$$
ce qui est une relation de Bézout pour A et B.

Question de cours.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Rappeler sans démonstration la formule de Taylor pour les polynômes.

2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes.

   (a) $(X-a)^r \mid P$ et $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P.

   (b) $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, \cdots, r-1\}$.

3. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse.

1. Nous avons
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

2.
   - On suppose que $(X-a)^r \mid P$ et que $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a)^r Q$. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \cdots, r-1\}$, d'après la formule de Leibniz,
$$P^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} ((X-a)^r)^{(\ell)} Q^{(k-\ell)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} r(r-1)\cdots(r-\ell+1)(X-a)^{r-\ell} Q^{(k-\ell)}.$$
   Donc, comme $\ell \leq k < r$, $P^{(k)}(a) = 0$. On suppose maintenant par l'absurde que $P^{(r)}(a) = 0$. Donc, d'après la formule de Taylor et ce qui précède,
$$P = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \left(\sum_{\ell=0}^{n-r-1} \frac{P^{(\ell+r+1)}(a)}{(\ell+r+1)!}(X-a)^\ell \right)(X-a)^{r+1}.$$
   D'où $(X-a)^{r+1} \mid P$ ce qui est absurde. Par conséquent $P^{(r)}(a) \neq 0$.
   - Réciproquement on suppose que $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, \cdots, r-1\}$. Alors, d'après la formule de Taylor,
$$P = \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \left(\sum_{\ell=0}^{n-r} \frac{P^{(\ell+r)}(a)}{(\ell+r)!}(X-a)^\ell \right)(X-a)^r.$$
   D'où $(X-a)^r \mid P$. Maintenant si l'on suppose par l'absurde que $(X-a)^{r+1} \mid P$ alors, comme précédemment avec la formule de Leibniz, on peut montrer que $P^{(r)}(a) = 0$ ce qui est absurde. Par conséquent $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P.

3. D'après ce qui précède, 1 est racine double de $P = X^5 + aX^2 + bX$ si $P(1) = P'(1) = 0$ i.e.
$$0 = 1 + a + b = 5 + 2a + b$$
   i.e. $a = -4$ et $b = 3$. Donc $P = X^5 - 4X^2 + 3X$ vérifie que 1 est racine double. En particulier il existe $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{aligned} P &= (X-1)^2(cX^3 + dX^2 + eX + f) \\ &= (X^2 - 2X + 1)(cX^3 + dX^2 + eX + f) \\ &= cX^5 + (d-2c)X^4 + (c-2d+e)X^3 + (d-2e+f)X^2 + (e-2f)X + f. \end{aligned}$$
   Donc, par unicité des coefficients d'un polynôme,
$$c = 1, \quad d = 2c, \quad c - 2d + e = 0, \quad d - 2e + f = -4, \quad e - 2f = 3, \quad f = 0$$
   i.e.
$$c = 1, \quad d = 2, \quad e = 3, \quad f = 0.$$
   Par conséquent
$$P = (X-1)^2(X^3 + 2X^2 + 3X) = (X-1)^2 X (X^2 + 2X + 3)$$
   avec $X^2 + 2X + 3$ sans racine réelle car de discriminant $\Delta = -8 < 0$.

Exercice. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Réponse. On décompose A et B en produits d'irréductibles P dans $\mathbb{K}[X]$:

$$A = \prod P^{\nu_P(A)}, \quad B = \prod P^{\nu_P(B)}.$$

Alors

$$A^2 = \prod P^{2\nu_P(A)}, \quad B^2 = \prod P^{2\nu_P(B)}.$$

Or $A^2 \mid B^2$, donc, pour tout P irréductible, $2\nu_P(A) \leq 2\nu_P(B)$ i.e. $\nu_P(A) \leq \nu_P(B)$. Donc $A \mid B$.

Exercice. On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_1 = X - 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer les coefficients a_n, b_n et c_n de $1, X$ et X^2 dans P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse. Nous avons premièrement $a_1 = -2, b_1 = 1$ et $c_1 = 0$. Puis, en écrivant $P_n = A_nX^3 + c_nX^2 + b_nX + a_n, A_n \in \mathbb{K}[X]$, nous obtenons

$$P_{n+1} = (A_nX^3 + c_nX^2 + b_nX + a_n)^2 - 2 = B_nX^3 + (2a_nc_n + b_n^2)X^2 + 2a_nb_nX + a_n^2 - 2.$$

Donc, par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$c_{n+1} = 2a_nc_n + b_n^2, \quad b_{n+1} = 2a_nb_n, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2.$$

Nous avons alors $a_2 = 2$ puis $a_3 = 3$ puis $a_n = 2$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $b_{n+1} = 4b_n$ pour $n \geq 2$. Or $b_2 = 2a_1b_1 = -4$, donc $b_n = 4^{n-2}b_2 = -4^{n-1}$ pour $n \geq 2$. Puis $c_2 = b_1^2 + 2a_1c_1 = 1$ et pour $n \geq 2$

$$c_{n+1} = 4c_n + 4^{2(n-1)}.$$

En particulier, pour n suffisamment grand,

$$c_n = 4c_{n-1} + 4^{2(n-2)} = 4^2c_{n-2} + 4 \times 4^{2(n-3)} + 4^{2(n-2)} = 4^3c_{n-3} + 4^2 \times 4^{2(n-4)} + 4 \times 4^{2(n-3)} + 4^{2(n-2)}.$$

Ainsi nous pouvons montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que

$$c_n = 4^{n-2}c_2 + \sum_{k=0}^{n-3} 4^k \times 4^{2(n-2-k)}.$$

En effet nous avons directement $c_2 = c_2 + 0$ et si l'on suppose l'égalité vérifiée pour c_n alors

$$c_{n+1} = 4^{n-1}c_2 + \sum_{k=0}^{n-3} 4^{k+1} \times 4^{2(n-2-k)} + 4^{2(n-1)} = 4^{n-1}c_2 + \sum_{k=1}^{n-2} 4^k \times 4^{2(n+1-2-k)} + 4^{2(n-1)}$$

i.e.

$$c_{n+1} = 4^{n-1}c_2 + \sum_{k=0}^{n-2} 4^k \times 4^{2(n+1-2-k)}.$$

Le théorème de récurrence permet donc de conclure.

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts.

1. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Montrer qu'il existe un unique $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \quad L_k(a_i) = \delta_{i,k}.$$

2. Soient $b_0, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$
Exprimer P à partir des polynômes $L_k, 0 \leq k \leq n$.

3. Montrer que, pour tout $p \in \{0, \cdots, n\}$,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p.$$

Réponse.

1. On suppose qu'il existe deux polynômes $L_k^1, L_k^2 \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}, L_k^1(a_i) = \delta_{i,k} = L_k^2(a_i)$. Alors $L_k^1 - L_k^2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(L_k^1 - L_k^2)(a_i) = 0$. Donc $L_k^1 - L_k^2$ est un polynôme de degré au plus n qui admet au moins $n+1$ racines, d'où $L_k^1 - L_k^2 = 0$ ce qui montre l'unicité. Maintenant pour l'existence on souhaite que les $a_i, i \neq k$, soient racines du polynôme L_k. Donc
$$L_k = \prod_{i \neq k} (X - a_i) Q$$
avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Or on souhaite que $\deg(L_k) \leq n$, d'où $\deg(Q) \leq 0$: il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q = a$. Ainsi
$$L_k = \prod_{i \neq k} (X - a_i) a.$$
Enfin on souhaite également que $L_k(a_k) = 1$ i.e. $1 = \prod_{i \neq k} (a_k - a_i) a$ i.e., comme les $a_i, 0 \leq i \leq n$, sont distincts,
$$a = \frac{1}{\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)}.$$
Par conséquent
$$L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$
est l'unique polynôme vérifiant les conditions souhaitées.

2. L'unicité est montrée de la même manière qu'à la question précédente. Maintenant pour l'existence, on peut chercher P comme combinaison linéaire des $L_k, 0 \leq k \leq n$:
$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$
Or, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,
$$b_i = P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(a_i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{i,k} = \lambda_i.$$
Donc
$$P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$$
est l'unique polynôme vérifiant les conditions souhaitées.

3. On applique la question précédente avec $b_i = a_i^p, 0 \leq i \leq n$: pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, nous avons $(X^p)(a_i) = a_i^p$. Donc, par unicité du polynôme,
$$X^p = \sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k.$$

Exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}, P^{(k)}(a) \geq 0$. Montrer que la fonction polynomiale associée au polynôme P n'admet pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Réponse. D'après la formule de Taylor pour les polynômes, nous avons

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

avec n le degré de P. Alors, en notant f la fonction polynomiale associée à P, pour tout $x \geq a$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k > 0$$

car $P(a) > 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \geq 0$.

Exercice. Soient $a \in \,]0, \pi[, n \in \mathbb{N}^*$ et $P = X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P.

Réponse. Nous avons

$$P = (X^2 - 2\cos(a)X + 1) \circ X^n$$

avec $Q = X^2 - 2\cos(a)X + 1$ de discriminant $\Delta = 4\cos(a)^2 - 4 = 4(\cos(a)^2 - 1) < 0$ car $0 \neq a \neq \pi$. Donc le polynôme Q admet deux racines complexes conjuguées distinctes

$$z_1 = \frac{2\cos(a) + 2i\sqrt{1-\cos(a)^2}}{2} = \frac{2\cos(a) + 2i|\sin(a)|}{2}, \quad z_2 = \frac{2\cos(a) - 2i|\sin(a)|}{2}.$$

Or $0 < a < \pi$, donc $\sin(a) > 0$ et

$$z_1 = \cos(a) + i\sin(a) = e^{ia}, \quad z_2 = \cos(a) - i\sin(a) = e^{-ia}.$$

Ainsi

$$P = (X^n - z_1)(X^n - z_2).$$

Il s'agit donc d'étudier les racines n-ièmes des complexes z_1 et z_2. Il s'agit de

$$w_k^{(1)} = e^{i\frac{2\pi k + a}{n}}, \quad w_k^{(2)} = e^{-i\frac{2\pi k + a}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Par conséquent nous obtenons la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - w_k^{(1)}) \prod_{k=0}^{n-1}(X - w_k^{(2)}) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - w_k^{(1)})(X - w_k^{(2)}) = \prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - (w_k^{(1)} + w_k^{(2)})X + w_k^{(1)}w_k^{(2)})$$

avec

$$w_k^{(1)} + w_k^{(2)} = 2\cos\left(\frac{2k\pi + a}{n}\right), \quad w_k^{(1)}w_k^{(2)} = 1.$$

Donc

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi + a}{n}\right)X + 1\right).$$

Il s'agit de se décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ car polynôme de degré 2 a pour racines les complexes $w_k^{(1)}$ et $w_k^{(2)}$ qui ne sont pas réels.