Question de cours. A l'aide d'un polynôme, montrer que, pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

Question de cours. Résoudre sur $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P$.

Exercice. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X \mid P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X \mid P \circ P - X$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P^{[n]} = P \circ \cdots \circ P$ le polynôme obtenu par composition n fois du polynôme P. Montrer que $P - X \mid P^{[n]} - X$.

Exercice. On considère les polynômes $A = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X - 3$.

1. Déterminer le quotient Q et le reste R dans la division euclidienne de A par B.
2. Déterminer leur PGCD $A \wedge B$.
3. Déterminer une identité de Bézout entre A et B.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Rappeler sans démonstration la formule de Taylor pour les polynômes.

2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes.

   (a) $(X-a)^r \mid P$ et $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P.

   (b) $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, \cdots, r-1\}$.

3. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice. On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_1 = X - 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer les coefficients a_n, b_n et c_n de $1, X$ et X^2 dans P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts.

1. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Montrer qu'il existe un unique $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \quad L_k(a_i) = \delta_{i,k}.$$

2. Soient $b_0, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$
Exprimer P à partir des polynômes $L_k, 0 \leq k \leq n$.

3. Montrer que, pour tout $p \in \{0, \cdots, n\}$,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p.$$

Exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}, P^{(k)}(a) \geq 0$. Montrer que la fonction polynomiale associée au polynôme P n'admet pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice. Soient $a \in]0, \pi[, n \in \mathbb{N}^*$ et $P = X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html