Question de cours. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ est un groupe pour une loi de composition interne que l'on précisera.

Exercice. On considère un morphisme d'anneaux $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Exercice. On considère pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \perp b = a + b - 1, \quad a \cdot b = ab - a - b + 2.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \perp, \cdot)$ est un corps.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Expliciter les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$.

Exercice. On considère $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers.

1. Montrer que A est un anneau non commutatif.
2. Montrer que les éléments inversibles de A sont ceux de déterminants ± 1. On pourra commencer par rappeler la formule du déterminant pour les matrices carrées d'ordre 2.
3. Les applications trace et déterminant sont-elles des morphismes d'anneaux de A vers $\mathbb{Z}$?

Exercice. On considère les corps

$$C_1 = \mathbb{Q}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad C_2 = \mathbb{Q}[i\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

1. Déterminer $x, y \in \mathbb{Q}[i\sqrt{2}]$ tels que
$$-1 = x^2 + y^2.$$
2. En déduire que les corps $\mathbb{Q}[i\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ne sont pas isomorphes.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice. On considère un groupe G noté multiplicativement et deux sous-groupes A et B de G. On définit le sous-ensemble

$$AB = \{ab, \quad a \in A, b \in B\} \subset G.$$

Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice. Soit $(G, \times)$ un groupe noté multiplicativement et $a \in G$ d'inverse a^{-1}. On considère la loi de composition interne $*$ défini par

$$\forall x, y \in G, \quad x * y = xay.$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe. On notera x^{-*} l'inverse de $x \in G$ pour cette loi.
2. Soient H un sous groupe de $(G, \times)$ et $K = a^{-1}H = \{a^{-1}x,\ x \in H\}$. Montrer que K est un sous-groupe de $(G, *)$.
3. Montrer que l'application $f : x \in G \longmapsto x * a^{-1}$ est un isomorphisme de $(G, \times)$ vers $(G, *)$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html