Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}^*, E$ un ensemble à n éléments et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triples $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Réponse.

1. Nous avons
$$\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad A \subset B\} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad A \subset B, |B| = k\}.$$
Donc
$$a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$
2. Nous avons
$$\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad A \cap B = \varnothing\} = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad A \subset B^c\} = \{(A,C) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad A \subset C\}.$$
Donc $b = a = 3^n$.
3. Nous avons
$$\begin{aligned}\{(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3, \quad A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing, E = A \cup B \cup C\}\\ = \{(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3, \quad A \cap B = \varnothing, C = (A \cup B)^c\}.\end{aligned}$$
Donc $c = b = 3^n$.

Exercice.

1. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{t^2+2t+5}{t^2-3t+2} dt$ pour tous $a, b > 2$.

Réponse.

1. Commençons par effectuer la division euclidienne :
$$X^2 + 2X + 5 = X^2 - 3X + 2 + 5X + 3.$$
Donc
$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{5X+3}{X^2-3X+2}$$
avec $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{5X+3}{X^2-3X+2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}.$$
Puis en multipliant par $X-1$ ou $X-2$ et en évaluent en 1 ou 2 nous obtenons
$$a = \frac{5 \times 1 + 3}{1-2} = -8$$
et
$$b = \frac{5 \times 2 + 3}{2-1} = 13.$$
Par conséquent
$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$

2. Nous avons alors
$$\int_a^b \frac{t^2+2t+5}{t^2-3t+2}dt = b-a-8(\ln(b-1)-\ln(a-1))+13(\ln(b-2)-\ln(a-2)).$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un sous-ensemble de $\{1, \cdots, n\}$ est lacunaire s'il est non vide et ne contient jamais deux entiers consécutifs. On note L_n le nombre de sous-ensembles lacunaires de $\{1, \cdots, n\}$.

1. Déterminer L_1, L_2, L_3 et L_4.
2. Montrer que $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n + 1$.
3. En déduire une expression explicite de L_n.

Réponse.

1. $L_1 = 1$ car il y a qu'un seul sous-ensemble $\{1\}$ et il est lacunaire.
   $L_2 = 2$ car il y a $\{1\}$ et $\{2\}$ comme sous-ensembles lacunaires.
   $L_3 = 4$ car il y a $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ et $\{1,3\}$ comme sous-ensembles lacunaires.
   $L_4 = 7$ car il y a $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}$ et $\{2,4\}$ comme sous-ensembles lacunaires.
2. On note E_{n+2} l'ensemble des sous-ensembles lacunaires de $\{1, \cdots, n+2\}$. Alors
   $$E_{n+2} = \{A \in E_{n+2}, \quad n+2 \in A\} \sqcup \{A \in E_{n+2}, \quad n+2 \notin A\}$$
   avec
   $$\{A \in E_{n+2}, \quad n+2 \in A\} \simeq E_n \cup \{n+2\}$$
   car pour choisir un tel sous-ensemble A il faut choisir un sous-ensemble lacunaire dans $\{1, \cdots, n\}$ car $n+1 \notin A$ et il ne faut pas oublier le sous-ensemble $\{n+2\}$, et de façon directe
   $$\{A \in E_{n+2}, \quad n+2 \notin A\} \simeq E_{n+1}.$$
   Donc
   $$L_{n+2} = |E_{n+2}| = |E_n| + 1 + |E_{n+1}| = L_{n+1} + L_n + 1.$$
3. Nous avons en particulier
   $$L_{n+2} + 1 = L_{n+1} + 1 + L_n + 1.$$
   Donc la suite $u = L + 1$ est récurrente linéaire d'ordre 2 avec $u_1 = L_1 + 1 = 2$ et $u_2 = L_2 + 1 = 3$. Ainsi, comme pour la suite de Fibonacci, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
   En particulier
   $$2 = u_1 = \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2}$$
   et
   $$3 = u_2 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$
   On obtient alors un système linéaire d'ordre 2 et nous avons, après calculs,
   $$L_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \right) - 1.$$

Question de cours. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$.

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$.

2. Déterminer le nombre d'applications croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$.

Réponse.

1. Soit $f : \{1, \cdots, p\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ strictement croissante. Alors $\{f(1), \cdots, f(p)\}$ est une partie à p éléments dans $\{1, \cdots, n\}$. Ainsi on peut considérer l'application de l'ensemble des applications strictement croissantes vers l'ensemble des parties p éléments dans $\{1, \cdots, n\}$ qui à une application f associe l'ensemble $\{f(1), \cdots, f(p)\}$. Or cette application est injective et surjective donc bijective. Ainsi le nombre à déterminer est $\binom{n}{p}$.

2. Soient f une telle application et $g : \{1, \cdots, p\} \longrightarrow \{1, \cdots, n+p-1\}$ définie par
$$g(x) = f(x) + x - 1, \quad x \in \{1, \cdots, p\}.$$
Alors l'application g est bien définie car, pour $x \in \{1, \cdots, p\}$,
$$1 \leq f(x) + x - 1 \leq n + p - 1$$
et, pour $x, y \in \{1, \cdots, p\}$ tels que $x < y$,
$$g(x) = f(x) + x - 1 \leq f(y) + x - 1 < f(y) + y - 1 = g(y).$$
En particulier l'application g est strictement croissante.

Réciproquement si on considère une application strictement croissante g de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n+p-1\}$ et l'application f définie par
$$f(x) = g(x) - x + 1, \quad x \in \{1, \cdots, p\}.$$
Alors, pour $x \in \{1, \cdots, p\}$,
$$f(x) = g(x) - x + 1 \leq n + p - 1 - p + 1 = n$$
et, $g(x) \geq x$ car sinon $\{g(1), \cdots, g(x)\} \subset \{1, \cdots, x-1\}$ ce qui est absurde par injectivité de g, d'où
$$f(x) = g(x) - x + 1 \geq 1.$$
De plus, pour $x \in \{1, \cdots, p-1\}$,
$$f(x+1) - f(x) = g(x+1) - (x+1) + 1 - g(x) + x - 1 = g(x+1) - g(x) - 1 \geq 0.$$
Donc f est croissante.

Par conséquent nous avons une bijection entre les applications croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ et les applications strictement croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n+p-1\}$. Donc, d'après la question précédentes, le nombre à déterminer est $\binom{n+p-1}{p}$.

Exercice. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$.

Réponse. Nous avons $(X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{4}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2}.$$
Or, en multipliant par $(X-i)^2$ ou $(X+i)^2$ et en évaluant en i ou $-i$, nous avons
$$b = \frac{4}{(i+i)^2} = -1, \quad d = \frac{4}{(-i-i)^2} = -1.$$
Donc
$$\frac{4}{(X+i)^2} = a(X-i) - 1 + (X-i)2R_1, \quad \frac{4}{(X-i)^2} = (X+i)^2 R_2 + c(X+i) - 1.$$

Ainsi, en dérivant et en évaluant en i ou $-i$,

$$a = -\frac{8(i+i)}{(i+i)^4} = -i, \quad c = -\frac{8(-i-i)}{(-i-i)^4} = i.$$

Par conséquent

$$\frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} - \frac{1}{(X+i)^2}.$$

Exercice. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \dfrac{1}{X}$. On pourra raisonner par l'absurde et étudier le multiplicité de 0 en tant que pôle de F'.

Réponse. On suppose par l'absurde qu'il existe $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$ tel que $F = \dfrac{P}{Q}$. Alors

$$\frac{1}{X} = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$$

i.e.

$$Q^2 = X(P'Q - PQ').$$

Donc 0 est racine de Q de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$. En particulier 0 est racine de Q^2 de multiplicité au moins 2α. De plus 0 est racine de Q' de multiplicité $\alpha - 1$ et n'est pas racine de P car $P \wedge Q = 1$. Ainsi 0 est racine de $P'Q - PQ'$ et est exactement de multiplicité $\alpha - 1$ car, par formule de Leibniz,

$$(P'Q - PQ')^{(\alpha-1)}(0) = 0$$

et

$$(P'Q - PQ')^{(\alpha)}(0) = -P(0)Q^{(\alpha+1)}(0) \neq 0.$$

Ainsi 0 est racine de $X(P'Q - PQ')$ de multiplicité α ce qui contredit le fait que $Q^2 = X(P'Q - PQ')$ et que 0 est racine de Q^2 de multiplicité au moins $2\alpha > \alpha - 1$.

Question de cours. Déterminer $|A \cup B|$ pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et E un ensemble.

Réponse. Nous avons

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

En effet

$$A \cup B = [A \backslash (A \cap B)] \sqcup [B \backslash (A \cap B)] \sqcup [A \cap B].$$

Donc

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Question de cours. Enoncer la formule de Pascal. La démontrer par dénombrement.

Réponse. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Soient $x \in \{1, \cdots, n\}$ et E l'ensemble des parties à k éléments dans $\{1, \cdots, n\}$. Alors $|E| = \binom{n}{k}$ et

$$E = \{A \in \mathcal{P}(E), \quad x \notin A, |A| = k\} \sqcup \{A \in \mathcal{P}(E), \quad x \in A, |A| = k\}$$
$$= \{A \in \mathcal{P}(E \backslash \{x\}), \quad |A| = k\} \sqcup \{\{B, x\}, \quad B \in \mathcal{P}(E \backslash \{x\}), \quad |B| = k - 1\}.$$

Donc

$$\binom{n}{k} = |E| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice. On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$.

1. On note $F = \dfrac{P_1}{(X-1)^3} + \dfrac{P_{-1}}{(X+1)^3}$. Quelle relation existe entre la partie polaire $\dfrac{P_1}{(X-1)^3}$ de F en 1 et celle $\dfrac{P_{-1}}{(X+1)^3}$ en -1 ?
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction F.
3. En déduire une relation de Bézout entre $(X+1)^3$ et $(X-1)^3$.

Réponse.

1. Nous avons $F(-X) = F(X)$ et

   $$F(-X) = -\frac{P_1(-X)}{(X+1)^3} - \frac{P_{-1}(-X)}{(X-1)^3}.$$

   Ainsi, par unicité des parties polaires,

   $$P_1 = -P_{-1}(-X).$$

2. Nous avons

   $$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{(X+1)^3}$$

   avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et

   $$P_1 = a(X-1)^2 + b(X-1) + c, \quad P_{-1} = d(X+1)^2 + e(X+1) + f.$$

   Or, d'après la question précédente,

   $$P_1 = -P_{-1}(-X) = -d(-X+1)^2 - e(-X+1) - f = -d(X-1)^2 + e(X-1) - f.$$

   Donc

   $$d = -a, \quad e = b, \quad f = -c$$

et

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} - \frac{c}{(X+1)^3}.$$

En multipliant par $(X-1)^3$ et en évaluant en 1 nous obtenons

$$c = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Puis en dérivant

$$\frac{1}{(X+1)^3} = a(X-1)^2 + b(X-1) + c + \frac{P_{-1}}{(X+1)^3}(X-1)^3$$

et en évaluant en 1 nous obtenons

$$b = -3\frac{1}{2^4} = -\frac{3}{16}.$$

Enfin en re dérivant et en évaluant en 1 nous obtenons

$$2a = \left(\frac{1}{(X+1)^3}\right)''(1) = -3\left(\frac{1}{(X+1)^4}\right)'(1) = 12\frac{1}{2^5} = \frac{3}{8}$$

i.e. $a = \frac{3}{16}$. Par conséquent

$$F = \frac{3}{16}\frac{1}{X-1} - \frac{3}{16}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{(X-1)^3} - \frac{3}{16}\frac{1}{X+1} - \frac{3}{16}\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(X+1)^3}.$$

3. Nous avons alors en multipliant par $(X-1)^3(X+1)^3$:

$$1 = (X+1)^3\left(\frac{3}{16}(X-1)^2 - \frac{3}{16}(X-1) + \frac{1}{8}\right) + (X-1)^3\left(-\frac{3}{16}(X-1)^2 - \frac{3}{16}(X-1) - \frac{1}{8}\right).$$

Exercice. On trace dans un plan n droites qui ne peuvent pas être parallèles et qui ne peuvent pas être concourantes. Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Réponse. On note t_n le nombre de triangle formés. En particulier $t_0 = t_1 = t_2 = 0$. On suppose $n \geq 3$. On note $\{d_1, \cdots, d_n\}$ les droites ainsi formées et $\{T_1, \cdots, T_{t_n}\}$ les triangles ainsi formés. Alors pour chaque T_i on peut lui associé trois droites parmi les $\{d_1, \cdots, d_n\}$ qui représentent ses côtés. Réciproquement à trois droites on peut associer l'unique triangle entre ces trois droites car elles ne sont ni parallèles ni concourantes. Par conséquent nous avons une bijection et $t_n = \binom{n}{3}$.