

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble à n éléments et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triples $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice.

1. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_a^b \frac{t^2 + 2t + 5}{t^2 - 3t + 2} dt$ pour tous $a, b > 2$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ est lacunaire s'il est non vide et ne contient jamais deux entiers consécutifs. On note L_n le nombre de sous-ensembles lacunaires de $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer L_1, L_2, L_3 et L_4 .
2. Montrer que $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n + 1$.
3. En déduire une expression explicite de L_n .

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html>

Question de cours. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$.

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.
2. Déterminer le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exercice. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\frac{4}{(X^2 + 1)^2}$.

Exercice. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$. On pourra raisonner par l'absurde et étudier le multiplicité de 0 en tant que pôle de F' .

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html>

Question de cours. Déterminer $|A \cup B|$ pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et E un ensemble.

Question de cours. Énoncer la formule de Pascal. La démontrer par dénombrement.

Exercice. On considère la fraction rationnelle $F = \frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$.

1. On note $F = \frac{P_1}{(X-1)^3} + \frac{P_{-1}}{(X+1)^3}$. Quelle relation existe entre la partie polaire $\frac{P_1}{(X-1)^3}$ de F en 1 et celle $\frac{P_{-1}}{(X+1)^3}$ en -1 ?
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction F .
3. En déduire une relation de Bézout entre $(X+1)^3$ et $(X-1)^3$.

Exercice. On trace dans un plan n droites qui ne peuvent pas être parallèles et qui ne peuvent pas être concourantes. Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html>