Question de cours. Une population est atteinte d'un virus. On sait que la proportion de personnes atteintes est 10^{-4}. Un test de dépistage a été mis au point. Les expérimentations ont permis de savoir que les probabilités que l'individu soit détecté positif s'il est atteint ou s'il ne l'est pas sont respectivement égales à $0,99$ et à $0,001$. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement atteint ?

Exercice. On considère n expériences Bernoulli indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, la probabilité de succès de la k-ième expérience vaut $\frac{1}{2k+1}$. On note p_n la probabilité que le nombre de succès obtenus aux n premières expériences soit pair.

1. Déterminer p_0, p_1 et p_2.
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$p_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Exercice. On considère un entier $n \geq 2$ et on suppose que n passagers montent successivement dans un avion de n places. Le premier prend une place au hasard. Ensuite, pour chaque $k \in \{1, ..., n\}$, le passager k s'assoit à la place k si elle est libre et choisit une place au hasard si la place k est occupée. On note p_k la probabilité que le k-ième passager s'assoit à la place k.

1. Montrer que $p_n = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right)$.
2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ est constante et donner cette constante.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancé est de $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100. On obtient 6. Quelle est la probabilité p_1 que le dé soit pipé ?

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 et on tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, ..., n\}$. Pour tout entier $m \in \{1, ..., n\}$, on note A_m l'événement "m divise x" et on note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin on note $p_1, ..., p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des $A_{p_k}, 1 \leq k \leq r$.

2. Soit $m \in \{1, ..., n\}$ tel que $m \mid n$. Calculer $\mathbb{P}(A_m)$.

3. Montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

4. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

5. On note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice. On considère une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble Ω et A et B deux événements.

1. On suppose que $A \cap B = \varnothing$. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}.$$

2. Montrer que l'inégalité précédente est vérifiée même si $A \cap B \neq \varnothing$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne où elle provient.
- Si la boule était blanche alors le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 et si elle était noire alors il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice. On considère trois événements A, B, C.

1. Exprimer $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ en fonction de $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{C}, \mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(B \cap C), \mathbb{P}(A \cap C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
2. On dispose de trois composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement p_1, p_2 et p_3, et de fonctionnements totalement indépendants les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit
   - si les composants sont disposés en série.
   - si les composants sont disposés en parallèle.
   - si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice. On considère un entier $n \geq 3$ et une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets). On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Préciser le cardinal $|\Omega|$.
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre). Calculer $\mathbb{P}(B)$. Quelle est la limite de cette quantité quand n tend vers $+\infty$?
4. On note C l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaisse avant 2 et tels que 2 apparaisse avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3). Calculer $\mathbb{P}(C)$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html