Question de cours. Enoncer le développement limité de la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Réponse. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2m}).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n = 2m$ est pair alors le développement limité à l'ordre n est le précédent et si $n = 2m+1$ est impair alors il devient

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2m+1}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k} + o(x^n).$$

Question de cours. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = x_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

1. (a) Montrer que la suite u est monotone et déterminer, en fonction de x_0, son sens de variation.
   (b) Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$h = h \circ \arctan\,.$$

Réponse.

1. (a) On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x - \arctan(x).$$

Donc la fonction g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0.$$

Donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \arctan(x) = g(x) \geq g(0) = 0$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geq \arctan(x).$$

Donc si $u_0 \in \mathbb{R}_+$ alors, par récurrence immédiate, nous obtenons que $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n) \leq u_n,$$

autrement dit la suite u est décroissante. De même

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad x - \arctan(x) = g(x) \leq g(0) = 0$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geq \arctan(x).$$

Donc si $u_0 \in \mathbb{R}_+$ alors, par récurrence immédiate, nous obtenons que $u_n \in \mathbb{R}_-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n) \geq u_n,$$

autrement dit la suite u est croissante. Dans les deux cas nous obtenons une suite monotone.

   (b) Si $x_0 \geq 0$ alors la suite u est décroissante et minorée par 0. SI $x_0 \leq 0$ alors la suite u est croissante et majorée par 0. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite u est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Or la fonction arctan est continue en 0, d'où, par passage à la limite dans $u_{n+1} = \arctan(u_n)$, nous obtenons $\ell = \arctan(\ell)$ i.e. $g(\ell) = 0$. Or la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $g'(x) = 0$ seulement pour $x = 0$. Par conséquent la fonction g est injective, d'où $\ell = 0$.

2. On procède par analyse-synthèse.

   - On conisdère $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h = h \circ \arctan$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et u la suite précédente. Alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h(u_{n+1}) = h(\arctan(u_n)) = h(u_n).$$
   Donc la suite $h \circ u$ est constante égale à $h(x_0)$. De plus, par continuité et limite,
   $$h(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} h(0).$$
   Par conséquent $h(x_0) = h(0)$ ce qui montre que la fonciton h est constante.
   - Réciproquement les fonctions constantes vérifient bien l'égalité fonctionnelle souhaitée.

   Par conséquent l'ensemble de telles fonctions est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$.

Réponse. Nous avons
$$x - \sin(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$
et
$$1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$
Donc
$$\begin{aligned}
\frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)} &\underset{x \to 0}{=} \frac{\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)}{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= \frac{\dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{60} + o(x^4)}{1 - \dfrac{x^2}{12} + o(x^3)} \\
&= \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{60} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right) \\
&= \frac{x}{3} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{60}\right) x^3 + o(x^3) \\
&= \frac{x}{3} + \frac{x^3}{90} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice. On considère les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ et de paramètre $n \in \mathbb{N}$:
$$(E_n) : x + \ln(x) = n.$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite x ainsi construite diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de la suite x.
4. Déterminer le développement asymptotique de la suite x à la précision $o(1)$
5. En déduire le développement asymptotique de la suite x à la précision $o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Réponse.

1. On considère la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x + \ln(x).$$

Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante et en particulier injective. De plus

$$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty, \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc, par théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n = f(x_n) = x_n + \ln(x_n)$.

2. Comme la fonction f est strictement croissante, la suite x est strictement croissante également. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, si $x_n \geq x_{n+1}$ alors $n = f(x_n) \geq f(x_{n+1}) = n+1$ ce qui est absurde. Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, soit la suite x diverge vers $+\infty$, soit la suite x est convergente. On suppose que la suite x converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, par continuité, la suite $(x_n + \ln(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ln(\ell)$ ce qui est absurde car cette suite est égale à la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge. Donc la suite x diverge vers $+\infty$.

3. Nous avons, par croissance comparée,

$$n = x_n + \ln(x_n) = x_n \left(1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} x_n(1 + o(1)).$$

Donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.

4. Nous avons

$$x_n = n - \ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{=} n - \ln(n + o(n)) = n - \ln(n) - \ln(1 + o(1)) = n - \ln(n) + o(1).$$

5. Par conséquent

$$\begin{aligned} x_n &\underset{n \to +\infty}{=} n - \ln(n - \ln(n) + o(1)) \\ &= n - \ln(n) - \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \end{aligned}$$

Question de cours. Enoncer la formule de Stirling.

Réponse. Nous avons
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Question de cours.

1. On considère deux suites réelles u et v telles que v non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de la suite u définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Réponse.

1. Comme la suite v est non nulle à partir d'un certain rang N_0, nous avons
$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Donc il existe $N \geq N_0$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$
En particulier la suite $\frac{u}{v}$ est positive à partir du rang N, d'où u et v sont de même signe à partir de ce rang.
2. Nous avons
$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\\ \operatorname{sh}(x) &\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),\\ \tan(x) &\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).\end{aligned}$$
Donc
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = -\frac{1}{6n^3}\left(1 + o(1)\right).$$
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$ dont la deuxième suite est non nulle en tout rang et négative. Donc, d'après ce qui précède, la suite u est négative à partir d'un certain rang.

Exercice. On considère une suite réelle u décroissante telle que
$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Déterminer un équivalent simple de la suite u.

Réponse. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'équivalent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad -\frac{\varepsilon}{n} \leq u_n + u_{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$
En particulier, comme la suite u est décroissante,
$$\forall n \geq N+1, \quad -\frac{\varepsilon}{n} \leq u_n + u_{n+1} - \frac{1}{n} \leq 2u_n - \frac{1}{n}, \quad 2u_n - \frac{1}{n} \leq u_{n-1} + u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$
D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Exercice. On considère les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ et de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(E_n) : x^n + x = 1.$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution que l'on note $x_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite x ainsi construite converge vers 1.
3. Le but du reste de cet exercice est de déterminer le développement asymptotique de la suite x avec une précision en $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

   (a) Montrer que, pour tout n suffisamment grand,

   $$\frac{\ln(n)}{2n} \leq x_n^n \leq 2\frac{\ln(n)}{n}.$$

   On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n suivante et l'appliquer aux différents termes présents.

   $$\forall y \in]0,1[, \quad g_n(y) = n\ln(1-y) - \ln(y).$$

   (b) En déduire un équivalent de la suite $(\ln(x_n^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (c) Conclure.

Réponse.

1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie par

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + x.$$

   Alors la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0.$$

   Donc la fonction f_n est strictement croissante en particulier injective. De plus $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 2$. Donc, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $1 = f(x_n) = x_n^n + x_n$.

2. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n+1} < x_n$ alors $1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} < x_n^n + x_n = 1$ ce qui est absurde. Par conséquent la suite x est croissante et majorée (par 1), d'où, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers $\ell \in [0,1]$. Si $\ell < 1$ alors $1 = x_n^n + x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \ell = \ell$ ce qui est absurde. Par conséquent $\ell = 1$.

3. (a) Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl}
g_n(x_n^n) & = & n\ln(1-x_n^n) - \ln(x_n^n) \\
& = & n\ln(x_n) - n\ln(x_n) \\
& = & 0, \\
g_n\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) & = & n\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{2n}\right) - \ln\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) \\
& \underset{n\to+\infty}{=} & n\left(-\frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) - \ln(\ln(n)) + \ln(n) + \ln(2) \\
& = & \frac{\ln(n)}{2} - \ln(\ln(n)) + o(\ln(n)) \\
& = & \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n)), \\
g_n\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right) & = & n\ln\left(1 - 2\frac{\ln(n)}{n}\right) - \ln\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right) \\
& \underset{n\to+\infty}{=} & n\left(-2\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) - \ln(\ln(n)) + \ln(n) - \ln(2) \\
& = & -\ln(n) - \ln(\ln(n)) + o(\ln(n)) \\
& = & -\ln(n) + o(\ln(n)).
\end{array}$$

Par conséquent, pour n suffisamment grand, $g_n\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) > 0 = g_n(x_n^n) > g_n\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)$. De plus la fonction g_n est dérivable et

$$\forall y \in \,]0,1[,\quad g_n'(y) = -\frac{n}{1-y} - \frac{1}{y} < 0.$$

Par conséquent la fonction g_n est strictement décroissante, d'où, pour n suffisamment grand,

$$\frac{\ln(n)}{2n} \leq x_n^n \leq 2\frac{\ln(n)}{n}.$$

(b) Nous avons donc, pour n suffisamment grand, par croissance de la fonction ln,

$$\ln\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) \leq \ln(x_n^n) \leq \ln\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

i.e.

$$\ln(\ln(n)) - \ln(2) - \ln(n) \leq \ln(x_n^n) \leq \ln(\ln(n)) + \ln(2) - \ln(n).$$

Par conséquent $\ln(x_n^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = g_n(x_n^n) = n\ln(1-x_n^n) - \ln(x_n^n)$, d'où

$$n\ln(1-x_n^n) = \ln(x_n^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$$

i.e. $\ln(1-x_n^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$. Or, d'après la question 3.(a), $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. Par conséquent

$$x_n = 1 - x_n^n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Question de cours. Enoncer la formule de Taylor-Young.

Réponse. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f est de classe C^n sur I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Question de cours.

1. Montrer que
$$\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire un développement asymptotique à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ lorsque $n \to +\infty$.

Réponse.

1. Nous avons
$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}-\frac{3}{16n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}-\frac{3}{16n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$
Donc $\alpha = \frac{3}{8}$.

2. Nous avons ensuite
$$\begin{aligned}
\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) &\underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \in]0,1[$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite u est convergente.

2. Déterminer le développement limité de la suite u avec une précision en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Réponse.

1. Nous avons
$$u_2 = 1 + \frac{u_1}{2} \in [0,2], \quad u_3 = 1 + \frac{u_2}{3} \in [0,2], ...$$
Donc, par récurrence, la suite u est bornée entre 0 et 2. Par conséquent $\frac{u_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2. Nous avons, d'après la question précédente,
$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} = 1 + \frac{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}{n+1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{(n+1)n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)n} + o\left(\frac{1}{(n+1)n}\right)$$
i.e.
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + o\left(\frac{1}{n(n-1)}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice. On considère la fonction $f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Montrer que la fonction f est bijective.
2. Déterminer le développement limite de la fonction f^{-1} à l'ordre 3 en 0.

Réponse.

1. La fonction f est dérivable et
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0.$$
Donc la fonction f est strictement croissante en particulier injective. De plus $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f est surjective. Par conséquent la fonction f est bijective.

2. La fonction f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et $f' > 0$, d'où f^{-1} est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier la fonction f^{-1} est de classe C^3 donc admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 :
$$f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} a + by + cy^2 + dy^3 + o(y^3).$$
Or $f(0) = 0$, d'où $a = f^{-1}(0) = 0$. Puis
$$\begin{aligned} y &= f(f^{-1}(y)) \\ &= f^{-1}(y) + \ln(1 + f^{-1}(y)) \\ &= 2f^{-1}(y) - \frac{(f^{-1}(y))^2}{2} + \frac{(f^{-1}(y))^3}{3} + o((f^{-1}(y))^3) \\ &\underset{y\to 0}{=} 2by + \left(2c - \frac{b^2}{2}\right) y^2 + \left(2d - bc + \frac{b^3}{3}\right) y^3 + o(y^3). \end{aligned}$$
Donc, par unicité d'un développement limité,
$$b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{b^2}{4} = \frac{1}{16}, \quad d = \frac{bc}{2} - \frac{b^3}{6} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{3\times 2^4} = -\frac{1}{3\times 2^6}.$$