Question de cours. Enoncer le développement limité de la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Question de cours. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = x_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

1. (a) Montrer que la suite u est monotone et déterminer, en fonction de x_0, son sens de variation.
   (b) Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$h = h \circ \arctan\,.$$

Exercice. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$.

Exercice. On considère les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ et de paramètre $n \in \mathbb{N}$:

$$(E_n) : x + \ln(x) = n.$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite x ainsi construite diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de la suite x.
4. Déterminer le développement asymptotique de la suite x à la précision $o(1)$
5. En déduire le développement asymptotique de la suite x à la précision $o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Enoncer la formule de Stirling.

Question de cours.

1. On considère deux suites réelles u et v telles que v non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice. On considère une suite réelle u décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Déterminer un équivalent simple de la suite u.

Exercice. On considère les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ et de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(E_n) : x^n + x = 1.$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution que l'on note $x_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite x ainsi construite converge vers 1.
3. Le but du reste de cet exercice est de déterminer le développement asymptotique de la suite x avec une précision en $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout n suffisamment grand,

   $$\frac{\ln(n)}{2n} \leq x_n^n \leq 2\frac{\ln(n)}{n}.$$

   On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n suivante et l'appliquer aux différents termes présents.

   $$\forall y \in]0,1[, \quad g_n(y) = n\ln(1-y) - \ln(y).$$

   (b) En déduire un équivalent de la suite $(\ln(x_n^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Conclure.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Enoncer la formule de Taylor-Young.

Question de cours.

1. Montrer que
$$\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire un développement asymptotique à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \in]0,1[$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite u est convergente.
2. Déterminer le développement limité de la suite u avec une précision en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice. On considère la fonction $f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Montrer que la fonction f est bijective.
2. Déterminer le développement limite de la fonction f^{-1} à l'ordre 3 en 0.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html