Exercice.

1. On considère la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ entier et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) En utilisant une minoration de u_n pour tout $n \geq 2$ entier, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.
   (b) En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ définie sur $]1, +\infty[$, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ lorsque $\alpha > 0$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Réponse.

1. (a) On suppose $\alpha \leq 0$. Alors, pour tout $n \geq 2$ entier, en notant $\beta = -\alpha \geq 0$,

$$u_n = \frac{(\ln(n))^\beta}{n} \geq \frac{(\ln(2))^\beta}{n} > 0.$$

Or la série $\sum \dfrac{(\ln(2))^\beta}{n}$ est divergente, d'où, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

   (b) On suppose $\alpha > 0$. Alors la fonction f est décroissante. Donc, pour tout $k \geq 2$ entier, pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$. Ainsi, en intégrant sur $[k, k+1]$, nous obtenons

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

De même, pour tout $k \geq 3$ entier, pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t)$, d'où, en intégrant sur $[k-1, k]$, nous obtenons

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt.$$

Par conséquent, en sommant sur $k \in \{3, ..., n\}$ pour tout $n \geq 3$ entier,

$$\int_3^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(t)dt,$$

avec

$$\int_2^n f(t)dt = \int_2^n \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} dt = \int_2^n \ln'(t)(\ln(t))^{-\alpha} dt.$$

Il faut donc distinguer selon si $\alpha \neq 1$ ou non.

- Si $\alpha > 1$ alors

$$\int_2^n f(t)dt = \left[\frac{(\ln(t))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^n = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln(n))^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(\ln(2))^{\alpha-1}}.$$

  Donc la suite des sommes partielles est une suite croissante majorée, donc convergente. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

- Si $\alpha = 1$ alors

$$\int_3^{n+1} f(t)dt = [\ln(\ln(t))]_3^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(3)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  Donc la suite des sommes partielles diverge, d'où la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

- Si $\alpha < 1$ alors

$$\int_3^{n+1} f(t)dt = \left[\frac{(\ln(t))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_3^{n+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left((\ln(n+1))^{1-\alpha} - (\ln(3))^{1-\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  Donc, comme précédemment, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

2. Nous avons

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Donc
$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Puis $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et
$$\ln(n^2+n) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n).$$

Par conséquent
$$\frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n(\ln(n))^2} > 0.$$

Or, d'après la question précédente pour $\alpha = 2 > 1$, la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série en question est convergente.

Exercice. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

Réponse. Nous avons
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice. On considère $u, v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}.$$

On suppose que la série $\sum v_n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_nv_n}$ diverge.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Réponse.

1. Comme la série $\sum v_n$ converge, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $1+n^2u_n = \underset{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis $n^2u_n = 1+n^2u_n-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et
$$v_n = \frac{1}{1+n^2u_n} = \frac{1}{n^2u_n}\frac{1}{\frac{1}{n^2u_n}+1} \sum_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2u_n}$$
i.e. $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ i.e., par propriété de la racine carrée, $\sqrt{u_nv_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Par conséquent, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\sqrt{u_nv_n}$ diverge.

2. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^n \sqrt{u_kv_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}\sqrt{\sum_{k=0}^n v_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}.$$
Par conséquent, par comparaison, la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Montrer que $\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel à déterminer.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Réponse.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}-\frac{3}{16n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}-\frac{3}{16n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   Donc $\alpha = \frac{3}{8}$.

2. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) &\underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   La série $\sum(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$ vérifie le critère des séries alternées donc converge. De plus la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument par comparaison car la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Par conséquent la série $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ est convergente.

3. Nous avons

$$\frac{\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})}{(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Donc

$$\frac{|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})|}{\frac{3\pi}{8n}} = \left|\frac{\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})}{(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Par conséquent

$$|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}.$$

   Or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, d'où la série en question n'est pas absolument convergente.

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer, en fonction de a et b, la nature de la série $\sum_{n\geq 1}(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$.
2. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Réponse.

1. Nous avons

$$\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = \ln(n) + a\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc la série est convergente si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & -1 \\ a & + & 2b & = & 0 \end{array}\right.$$

si et seulement si $b = 1$ et $a = -2$.

2. Dans le cas où $a = -2$ et $b = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k) + a\ln(k+1) + b\ln(k+2)) &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(k+1)) - \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k+2)) \\ &= 0 - \ln(n+1) - \ln(2) + \ln(n+2) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2).\end{aligned}$$

Exercice. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}f(0)$.
2. En déduire, en fonction de α, la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse.

1. Nous avons $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}f(0)$ si et seulement si

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt - \frac{1}{n}f(0) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt - \frac{1}{n}f(0)\right| = \left|\int_0^{\frac{1}{n}} (f(t^n) - f(0))dt\right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |f(t^n) - f(0)|dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sup_{[0,\frac{1}{n}]} |f - f(0)|dt = \frac{1}{n}\sup_{[0,\frac{1}{n}]} |f - f(0)|.$$

Et la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc, par théorème de Heine, f est uniformément continue, d'où $\sup_{[0,\frac{1}{n}]} |f - f(0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt - \frac{1}{n}f(0) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$$

i.e. $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}f(0)$.

2. Nous avons donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$. Par conséquent, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (ou à termes négatifs), la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice.

1. Soient u et v deux suites réelles telles que v est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Montrer que si v est une suite positive et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n+i)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Réponse.

1. (a) On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Donc, comme v non nulle à partir d'un certain rang, $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ entier,
$$\frac{3}{2} \geq \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2} > 0.$$
Donc u_n et v_n sont de même signe à partir de ce rang n_0.
   (b) On suppose que $v > 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ entier,
$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$
Ainsi, si la série $\sum u_n$ est divergente alors, d'après la seconde inégalité, la série $\sum v_n$ l'est également. Et si la série $\sum u_n$ est convergente alors, d'après la premère inégalité, la série $\sum v_n$ l'est également. Par conséquent les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
   (c) Nous avons
$$\left|\frac{((-1)^n+i)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1}\right| = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Or
$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right) > 0$$
et la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est convergente. Par conséquent la série en question est absolument convergente donc convergente.

Exercice. On considère $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

1. On considère v la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Même question si $v_n = \frac{u_n}{u_1+...+v_n}$. On pourra étudier la suite $w = (\ln(1-v_n))_{n\geq 2}$ dans le cadre de la divergence.

Réponse.

1. • On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par conséquent, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.

- Réciproquement on suppose que la série $\sum v_n$ converge. Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n < 1$ pour tout $n \geq n_0$ entier. Or, pour tout $n \geq n_0$ entier, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ i.e. $v_n + u_n v_n = u_n$ i.e $v_n = (1-v_n)u_n$ i.e., comme $1 - v_n \neq 0, u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par conséquent la série $\sum u_n$ est également convergente par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

2. - On suppose que la série $\sum u_n$ converge. On note $S \in \mathbb{R}_+^*$ sa somme. Alors

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{u_1 + ... + u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{S}.$$

Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{S}$. Par conséquent, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.

- On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Alors, par propriété de ln et somme télescopique

$$\sum_{n=2}^{N} \ln(1-v_n) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{u_1 + ... + u_{n-1}}{u_1 + ... + u_n}\right) = \ln(u_1) - \ln(u_1 + ... + u_N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $-\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, d'où, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la séries $\sum v_n$ diverge. De même si v ne tend pas vers 0 alors alors la série $\sum v_n$ diverge (grossièrement).

Exercice. On considère $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle, et la suite v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_n.$$

Montrer que si la suite v est bornée alors la série $\sum u_n$ converge.

Réponse. On suppose que la suite v est bornée. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme la suite u est décroissante,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k + n u_n = n(u_n - u_{n+1}) \geq 0.$$

Donc la suite v est croissante. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la suite v converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$ entier,

$$u_n - u_N = \sum_{k=n}^{N-1} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k}(v_{k+1} - v_k) \leq \frac{1}{n}(v_N - v_n).$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons,

$$u_n = u_n - 0 \leq \frac{1}{n}(\ell - v_n)$$

i.e. $0 \leq n u_n \leq \ell - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent $n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = v_n + n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + 0 = \ell.$$

Donc la série $\sum u_v$ converge.