Exercice.

1. On considère la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ entier et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) En utilisant une minoration de u_n pour tout $n \geq 2$ entier, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

   (b) En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ définie sur $]1, +\infty[$, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ lorsque $\alpha > 0$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice. Calculer la somme $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice. On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Déterminer la seule limite possible ℓ pour la suite u.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.
3. En déduire que la suite u converge vers ℓ et la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Montrer que $\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel à déterminer.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice.

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion disjointe des $A_n = \{2^n(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}$.

Exercice. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}$.

1. Déterminer la nature de cette série par développement limité.
2. Déterminer la nature de cette série en appliquant le critère des séries alternées directement. Préciser un encadrement de la somme de cette série et une majoration de la valeur absolue du reste.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice.

1. Soient u et v deux suites réelles telles que v est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Montrer que si v est une suite positive et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n + i)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Exercice.

1. Montrer que $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est la réunion disjointe des $D_n = \{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ k\ell = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que, pour tout $s \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^s}$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice. On considère la suite u définie par $u_0 = a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Déterminer la limite de la suite u.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^3$ en utilisant la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$ en utilisant la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html