Sujet type MP* (sans préparation) :

Exercice. On considère l'application $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & (aX+1)\times P + (bX^2+c)\times P' \end{array}$. Quelles relations doivent vérifier a, b et c pour que f soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Déterminer, dans ce cas, le déterminant et le rang de f.

Réponse.

- On procède par analyse-synthèse.
  - On suppose que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors

    $$f(X^2) = (aX+1)X^2+2(bX^2+c)X = aX^3+X^2+2bX^3+2cX = (a+2b)X^3+X^2+2cX \in \mathbb{R}_2[X].$$

    Ainsi $a + 2b = 0$ i.e. $a = -2b$.
  - Réciproquement si $a = -2b$ alors f est linéaire,

    $$f(1) = 1 - 2bX \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(X) = (1-2bX)X + (bX^2+c) = -bX^2 + X + c \in \mathbb{R}_2[X]$$

    et

    $$f(X^2) = (1-2bX)X^2 + 2(bX^2+c)X = X^2 + 2cX \in \mathbb{R}_2[X].$$

    Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

  Par conséquent pour que f soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $a = -2b$.
- Dans ce cas, nous avons, en notant $e = (1, X, X^2)$,

  $$M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ -2b & 1 & 2c \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}.$$

  Donc

  $$\det(f) = 1 + 2bc + 2bc = 1 + 4bc.$$

  Ainsi
  - Si $b = 0$ alors $\det(f) = 1$ et $\mathrm{rg}(f) = 3$.
  - Si $b \neq 0$ et $c \neq -\dfrac{1}{4b}$ alors $\det(f) \neq 0$ et $\mathrm{rg}(f) = 3$.
  - Si $b \neq 0$ et $c = -\dfrac{1}{4b}$ alors $\det(f) = 0$ et

    $$M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4b} & 0 \\ -2b & 1 & -\frac{1}{2b} \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$$

    équivalente à, grace aux opérations $L_1 \leftarrow 4bL_1$ et $L_2 \leftarrow 2bL_2$, $\begin{pmatrix} 4b & -1 & 0 \\ -4b^2 & 2b & -1 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$

    équivalente à, grâce à l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + bL_1$, $\begin{pmatrix} 4b & -1 & 0 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$

    équivalente à, grâce à l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, $\begin{pmatrix} 4b & -1 & 0 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $b \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Exercice. Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g'(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1]$, tel que

$$g'(c) = \frac{g(c)}{c}.$$

Réponse. Graphiquement nous avons $\dfrac{g(c)}{c} = \dfrac{g(c)-g(0)}{c-0}$ le coefficient directeur de la droite d entre les points $(0,0)$ et $(c, g(c))$. De plus $g'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse c. Ainsi la question est de montrer que cette droite d est la tangente à la courbe au point d'abscisse c.

On considère l'application $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(0) = g'(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0,1]$,

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

Alors la fonction h est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$ avec, pour tout $x \in]0,1]$,

$$h'(x) = \frac{g'(x)x - g(x)}{x^2}.$$

- Si $g(1) = 0$ alors $c = 1$ convient car $g'(1) = 0$.
- Sinon. Quitte à considérer $-h$, on peut supposer $h(1) > 0$. La fonction h est continue sur $[0,1]$, donc il existe $c \in [0,1]$ tel que $h(c) = \sup\limits_{[0,1]} h$.
  - Si $c = 0$ alors $0 = h(0) = h(c) \geq h(1) > 0$ ce qui est absurde.
  - Si $c = 1$ alors $h'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} \geq 0$ et $h'(1) = \dfrac{g'(1)-g(1)}{1^2} = -g(1) < 0$ ce qui est absurde.

  Par conséquent $c \in]0,1[$. Donc $h'(c) = 0$ i.e. $g'(c)c = g(c)$ i.e. $g'(c) = \dfrac{g(c)}{c}$.

Sujet type MP* (avec préparation) :

Exercice.

1. **Nombre de Mersenne** : Soient a et n deux entiers ≥ 2. Montrer que si $a^n - 1$ est un nombre premier alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

2. **Nombre de Fermat** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier alors n est une puissance de 2.

Réponse.

1. On suppose que $a^n - 1$ est un nombre premier. Or

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + ... + 1)$$

avec $a - 1 \in \mathbb{N}^*, a^{n-1} + ... + 1 > 1$ et $a^n - 1$ premier. Donc $a - 1 = 1$ i.e. $a = 2$. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = pq$. Alors

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^{(p-1)q} + ... + 1)$$

avec $2^n - 1$ premier. Donc $2^p - 1 = 1$ ou $2^p - 1 = 2^n - 1$ i.e. $p = 1$ ou $n = p$. Par conséquent n est premier.

2. On procède par contraposée. On suppose que n n'est pas une puissance de 2. Alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = pq$ et p impair > 1. Alors, comme p impair,

$$2^n + 1 = 2^{pq} - (-1)^p = (2^q + 1)(2^{(p-1)q} - 2^{(p-2)q} + ... + 4 - 2 + 1).$$

Donc $2^q + 1 \mid 2^n + 1$ avec $q \neq 0$ et $q \neq n$. Ainsi $2^n + 1$ n'est pas premier.

Exercice. On considère une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq M|f(x)|.$$

Montrer qui si la fonction f s'annule alors la fonction f est identiquement nulle.

Réponse. On suppose que la fonction f s'annule en un $b \in \mathbb{R}$ et on suppose par l'absurde que la fonction f ne s'annule pas en un $a \in \mathbb{R}$. On suppose $a < b$. L'autre cas se traite de la même façon. On considère

$$c = \sup\{x \in [a, b[, \ \forall t \in [a, x[, \ f(t) \neq 0\}$$

pour avoir $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, c[$. Donc, quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, c[$. De plus, par continuité de la fonction f, $f(c) = 0$. En effet si $f(c) > 0$ alors, par continuité de la fonction f, il existe $d \in [c, b[$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, d]$. Par conséquent $c > d$ par définition de c ce qui est absurde. On considère ensuite la fonction $\varphi : [a, c[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a, c[, \quad \varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Donc, par hypothèse, la fonction $|\varphi|$ est bornée par M. Ainsi, pour tout $x \in [a, c[$,

$$|\ln(|f(x)|) - \ln(|f(a)|)| = \left| \int_a^x \varphi(t)dt \right| \leq M(x - a) \leq M(c - a).$$

Donc, en faisant tendre x vers c, $+\infty \leq 0$ ce qui est absurde. Par conséquent $f(a) = 0$.

Sujet type MP (avec préparation) :

Exercice. On considère les équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \qquad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Réponse.

1. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (H) est $y' = \dfrac{3}{2x}y$. Donc de solutions $y : x \longmapsto \lambda \exp\left(\dfrac{3}{2}\ln(x)\right) = \lambda x^{\frac{3}{2}}$ sur $]0, +\infty[$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante. On considère $\lambda \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $y : x \longmapsto \lambda(x)x^{\frac{3}{2}}$ sur $]0, +\infty[$. Alors la fonction y est solution de (E) si et seulement si
$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \quad x^{\frac{1}{2}} = 2x\lambda'(x)x^{\frac{3}{2}} + 2x\lambda(x)\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3\lambda(x)x^{\frac{3}{2}} = 2\lambda'(x)x^{\frac{5}{2}}$$
i.e.
$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{2x^2}.$$
En particulier la fonction $y : x \longmapsto -\dfrac{1}{2x}x^{\frac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ est solution particulière de l'équation (E). Par conséquent les solutions de l'équation (E) sont de la forme
$$x \longmapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$$
sur $]0, +\infty[$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. On suppose par l'absurde qu'il existe une solution y à l'équation (E) sur $[0, +\infty[$. En particulier y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \quad y(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$
De plus y est de classe C^1 en 0 ce qui est absurde car, d'après l'expression précédente, $y'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent (E) n'admet pas de solution sur $[0, +\infty[$.

Exercice. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}, \quad G = \mathrm{Vect}((1, 0, 1)).$$

1. Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.
2. (a) Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G.
   (b) Ecrire la matrice de p dans la base canonique et également dans une base adaptée pour qu'elle soit diagonale.
3. Faire de même avec la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

Réponse.

1. Pour commencer nous avons $\dim(G) = 1$ et G non inclus dans F car $(1, 0, 1) \notin F$. De plus $F \neq \mathbb{R}^3$ et $((2, -1, 0), (3, 0, 1))$ est une famille libre de F, d'où $\dim(F) = 2$. Par conséquent nous avons $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$, d'où F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors, d'après la question précédente, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(x, y, z) = a(2, -1, 0) + b(3, 0, 1) + c(1, 0, 1).$$

Donc nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & 3b & + & c & = & x \\ -a & & & & & = & y \\ & & b & + & c & = & z \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3b & + & c & = & x & + & 2y \\ & & a & = & -y & & \\ b & + & c & = & z & & \end{array}\right.$$

i.e., en effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2b & & & = & x & + & 2y & - & z \\ & & a & = & -y & & & & \\ b & + & c & = & z & & & & \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} b & = & \frac{1}{2}x & + & y & - & \frac{1}{2}z \\ a & = & & - & y & & \\ c & = & -\frac{1}{2}x & - & y & + & \frac{1}{2}z \end{array}\right.$$

Par conséquent

$$p(x, y, z) = a(2, -1, 0) + b(3, 0, 1) = \left(\frac{3}{2}x + y - \frac{3}{2}z, y, \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z\right).$$

(b) Nous avons, en notant e la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$M_e(p) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Puis, en notant $b = ((2, -1, 0), (3, 0, 1), (1, 0, 1))$,

$$M_b(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Nous avons de même, avec les notations précédentes,

$$s(x, y, z) = 2p(x, y, z) - (x, y, z) = (2x + 2y - 3z, y, x + 2y - 2z).$$

Donc

$$M_e(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$M_b(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sujet type MP (avec préparation) :

Exercice. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. On note p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1. Soit $x \notin \ker(f^{p-1})$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0$.
3. On suppose à présent $n = p$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.
4. Donner la matrice de f dans cette base.

Réponse.

1. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que
$$0 = \lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + ... + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x).$$
Donc, en appliquant f^{p-1},
$$0 = \lambda_0 f^{p-1}(x) + 0 + ... + 0,$$
d'où, comme $x \notin \ker(f^{p-1})$, $\lambda_0 = 0$. Puis, par itérations successives, $\lambda_1 = ... = \lambda_{p-1} = 0$.
2. Nous avons donc $p \leq n$ car p est le nombre de vecteurs dans la famille libre précédente et $n = \dim(E)$. Par conséquent $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.
3. La famille présente est libre d'après la question 1 et de bonne taille, donc est une base de E.
4. Nous avons, en notant b cette base,
$$M_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice. On considère la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in [0,1]$,

- $g(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x = \dfrac{p}{q}$ est son écriture irréductible,
- $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que la fonction g est discontinue en tout point $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
2. (a) Soient $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, $N \in \mathbb{N}^*$ et
$$\Gamma_N = \left\{ y = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1, q < N \right\}.$$
Montrer que Γ_N est fini et que $\delta := \inf\limits_{y \in \Gamma_N} |x - y| > 0$.

   (b) En déduire que la fonction g est continue en tout point $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Réponse.

1. Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. On suppose par l'absurde que la fonction g est continue en x. Or $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in ([0,1] \backslash \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Ainsi, par continuité de la fonction g en x,
$$0 \neq g(x) = g\left(\lim_{n \to +\infty} x_n \right) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$
ce qui est absurde. Par conséquent la fonction g est discontinue en tout $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

2. (a) On considère l'application φ qui à $y = \dfrac{p}{q} \in \Gamma_N^*$ $(p \wedge q = 1, q < N)$ associe le couple (p, q). Alors

- φ est bien définie car si $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ avec $p, p', q, q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1 = p' \wedge q'$ alors $pq' = p'q$. Donc, par lemme de Gauss, $p \mid p'$ et $p' \mid p$, d'où $p = p'$ et de même $q = q'$,
- φ est injective,
- φ est à valeurs dans $\{1, ..., N-1\}^2$ car, pour tout $y = \dfrac{p}{q} \in \Gamma_N^*$ $(p \wedge q = 1, q < N)$, nous avons $1 \leq q \leq N-1$ et, comme $y \leq 1$, nous avons également $1 \leq p \leq q \leq N-1$.

Par conséquent Γ_N^* est en bijection avec une partie de $\{1, ..., N-1\}^2$. En particulier nous avons $|\Gamma_N^*| \leq (N-1)^2$ et $|\Gamma_N| = 1 + |\Gamma_N^*| \leq (N-1)^2 + 1 < +\infty$.
Par conséquent, comme $x \notin \Gamma_N$ et Γ_N fini, nous avons $\delta := \inf\limits_{y \in \Gamma_N} |x - y| > 0$. Pour le détailler nous pouvons raisonner par l'absurde. Si $\delta = 0$ alors, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma_N^{\mathbb{N}}$ tel que $|x - y_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Or la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans l'ensemble fini Γ_N, donc il existe une extractrice ψ telle que la suite $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante. Par conséquent $x = y_{\psi(0)} \in \Gamma_N$ ce qui est absurde.

(b) Soit $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $y \in [0,1]$ tel que $|x - y| < \delta$, nous avons

- Si $y \notin \mathbb{Q}$ alors $|g(x) - g(y)| = 0 < \varepsilon$.
- Si $y = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ alors $y \notin \Gamma_N$ car $|x - y| < \delta$, d'où $q \geq N$ et

$$|g(x) - g(y)| = g(y) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N}.$$

Or $\dfrac{1}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$.

Par conséquent $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$ ce qui montre que g est continue en tout $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.