Sujet type MP* (sans préparation) :

Exercice. On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (aX+1) \times P + (bX^2+c) \times P' \end{array}.$$

Quelles relations doivent vérifier a, b et c pour que f soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Déterminer, dans ce cas, le déterminant et le rang de f.

Exercice. Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g'(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]0,1]$, tel que

$$g'(c) = \frac{g(c)}{c}.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Sujet type MP* (avec préparation) :

Exercice.

1. **Nombre de Mersenne** : Soient a et n deux entiers ≥ 2. Montrer que si $a^n - 1$ est un nombre premier alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

2. **Nombre de Fermat** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier alors n est une puissance de 2.

Exercice. On considère une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq M|f(x)|.$$

Montrer qui si la fonction f s'annule alors la fonction f est identiquement nulle.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Sujet type MP (avec préparation) :

Exercice. On considère les équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \qquad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}, \quad G = \mathrm{Vect}((1, 0, 1)).$$

1. Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.
2. (a) Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G.
   (b) Ecrire la matrice de p dans la base canonique et également dans une base adaptée pour qu'elle soit diagonale.
3. Faire de même avec la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Sujet type MP (avec préparation) :

Exercice. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. On note p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1. Soit $x \notin \ker(f^{p-1})$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0$.
3. On suppose à présent $n = p$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.
4. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice. On considère la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in [0,1]$,

- $g(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x = \dfrac{p}{q}$ est son écriture irréductible,
- $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que la fonction g est discontinue en tout point $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
2. (a) Soient $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}), N \in \mathbb{N}^*$ et

$$\Gamma_N = \left\{ y = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1, q < N \right\}.$$

Montrer que Γ_N est fini et que $\delta := \inf\limits_{y \in \Gamma_N} |x - y| > 0$.

(b) En déduire que la fonction g est continue en tout point $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html