Question de cours. Montrer que $\{x > 0, \forall y < 0, x < y\} = \varnothing$.

Question de cours. Décrire la géométrie des solutions en fonctions du paramètre réel m puis donner l'ensemble des solutions quand ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array}\right.$$

Question de cours. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $(iz - z)\overline{z - i} \in i\mathbb{R}$. Décrire géométriquement les points correspondants.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

1. Montrer que les réels $\sup_{x\in\mathbb{R}} (\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y))$ et $\inf_{y\in\mathbb{R}} (\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y))$ sont bien définis.
2. Montrer que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)\right) \leq \inf_{y\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y)\right).$$
3. A-t-on égalité en général ? Si oui le démontrer. Si non déterminer un contre-exemple.

Réponse.

1. Comme la fonction f est bornée il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$. Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leq \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \leq M.$$
Donc
$$m \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)\right) \leq M.$$
De même
$$m \leq \inf_{y\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y)\right) \leq M.$$
Donc ces réels sont bien définis.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$f(x, y) \leq \sup_{x'\in\mathbb{R}} f(x', y).$$
Donc
$$\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x'\in\mathbb{R}} f(x', y).$$
Ainsi $\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x'\in\mathbb{R}} f(x', y)$ est un majorant de la fonction $x \longmapsto \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)$. Donc, comme la borne supérieure est le plus petit des majorants,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)\right) \leq \inf_{y\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x'\in\mathbb{R}} f(x', y)\right).$$
3. Non nous n'avons pas égalité en général. Par exemple si l'on considère la fonction
$$f : (x, y) \longmapsto 1_{\{x=y\}}$$
alors
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)\right) = \sup_{x\in\mathbb{R}} 0 = 0$$
et
$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y)\right) = \inf_{y\in\mathbb{R}} 1 = 1.$$
Par contre nous pouvons avoir égalité par exemple pour la fonction constante égale à 1.

Exercice. On définit une relation binaire $\preceq$ sur le demi-plan complexe $P_i = \{z \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}(z) \geq 0\}$ par, pour tout $z_1, z_2 \in P_i, z_1 \preceq z_2$ si $|z_1| < |z_2|$ ou $(|z_1| = |z_2|$ et $\text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_2))$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre totale.
2. Peut-on étendre cette relation d'ordre sur $\mathbb{C}$?
3. Cette relation d'ordre est-elle compatible avec les opérations suivantes ?
   (a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in P_i, z_1 \preceq z_2 \Longrightarrow z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3$
   (b) $\forall z_1, z_2 \in P_i, [0 \preceq z_1, 0 \preceq z_2] \Longrightarrow 0 \preceq z_1 z_2$
   (c) $\forall z \in P_i, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, 0 \preceq z \Longrightarrow 0 \preceq \lambda z$

Réponse.

1. On vérifie les axiomes d'une relation d'ordre :
   - Réflexive : Soit $z \in P_i$. Alors $|z| = |z|$ et $\text{Re}(z) \leq \text{Re}(z)$. Donc $z \preceq z$.
   - Transitive : Soient $z_1, z_2, z_3 \in P_i$ tels que $z_1 \preceq z_2$ et $z_2 \preceq z_3$. Alors nous avons les différents cas suivants.
     - Si $|z_1| < |z_2|$ et $|z_2| < |z_3$ alors $|z_1| < |z_3|$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
     - Si $|z_1| < |z_2|, |z_2| = |z_3|$ et $\text{Re}(z_2) \leq \text{Re}(z_3)$ alors $|z_1| < |z_3$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
     - Si $|z_1| = |z_2|, \text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_2)$ et $|z_2| < |z_3|$ alors $|z_1| < |z_3|$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
     - Si $|z_1| = |z_2||, \text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_2), |z_2| = |z_3|$ et $\text{Re}(z_2) \leq \text{Re}(z_3)$ alors $|z_1| = |z_3|$ et $\text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_3)$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
   - Antisymétrie : Soient $z_1, z_2 \in P_i$ tels que $z_1 \preceq z_2$ et $z_2 \preceq z_1$. Etudions les différents cas.
     - $|z_1| < |z_2|$ est impossible car nous avons $|z_2| \leq |z_1|$.
     - $|z_2| > |z_1|$ est également impossible.
     - Il ne reste plus que $|z_1| = |z_2|, \text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_2)$ et $\text{Re}(z_2) \leq \text{Re}(z_1)$. Ainsi $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$. Donc, comme $z_1, z_2 \in P_i$,

$$z_1 = \text{Re}(z_1) + i\text{Im}(z_1) = \text{Re}(z_1) + i\sqrt{|z_1|^2 - (\text{Re}(z_1))^2} = \text{Re}(z_2) + i\sqrt{|z_2|^2 - (\text{Re}(z_2))^2} = z_2.$$

   Montrons maintenant que cette relation d'ordre est totale. Soit $z_1, z_2 \in P_i$. Etudions les différents cas :
   - Si $|z_1| < |z_2|$ alors $z_1 \preceq z_2$.
   - Si $|z_2| < |z_1|$ alors $z_2 \preceq z_1$.
   - Si $|z_1| = |z_2|$ et $\text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_2)$ alors $z_1 \preceq z_2$.
   - Si $|z_1| = |z_2|$ et $\text{Re}(z_2) \leq \text{Re}(z_1)$ alors $z_2 \preceq z_1$.

   Par conséquent, dans tous les cas nous avons $z_1 \preceq z_2$ ou $z_2 \preceq z_1$.

2. Non nous ne pouvons pas étendre cette relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ car sinon $i \preceq -i$ et $-i \preceq i$ sans avoir $i = -i$.

3. (a) Soient $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1$. Alors $z_1, z_2, z_3 \in P_i, z_1 \preceq z_2, z_1 + z_3 = -1$ et $z_2 + z_3 = 0$. Donc nous n'avons pas $-1 = z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3 = 0$ car $|-1| = 1 > 0$.
   (b) Soient $z_1, z_2 \in P_i$ tels que $0 \preceq z_1$ et $0 \preceq z_2$.
   - Soit $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ et dans ce cas nous avons bien $0 = z_1 z_2 \preceq z_1 z_2$.
   - Soit $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Alors $0 < |z_1|$ et $0 < |z_2|$. Ainsi $0 < |z_1 z_2|$. Donc $0 \preceq z_1 z_2$.

   (c) Soient $z \in P_i$ tel que $0 \preceq z$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
   - Soit $z = 0$ ou $\lambda = 0$ et dans ce cas $0 \preceq 0 = \lambda z$.
   - Soit $z \neq 0$ et $\lambda > 0$ et dans cas $0 < \lambda|z| = |\lambda z|$. Ainsi $0 \preceq \lambda z$.

Question de cours. Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et l'exprimer à partir de celles de A et B dont on aura justifié l'existence.

Question de cours. Décrire la géométrie des solutions en fonctions des paramètre réels a et b puis donner l'ensemble des solutions quand ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire et son corollaire (sur $\mathbb{C}$). Préciser les cas d'égalité.

Exercice. On considère deux parties majorées non vides A et B de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la partie $A \cup B$ admet une borne supérieure et qu'elle vérifie
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)).$$

2. On définit
$$A + B = \{a + b, \quad a \in A, b \in B\}.$$
Montrer que la partie $A + B$ admet une borne supérieure et qu'elle vérifie
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

3. On définit de même
$$A \times B = \{ab, \quad a \in A, b \in B\}.$$
A-t-on également que la partie $A \times B$ admet une borne supérieure et qu'elle vérifie
$$\sup(A \times B) = \sup(A) \sup(B) \quad ?$$

Réponse.

1. Comme A est non vide, la partie $A \cup B$ est également non vide. De plus la parties A et B sont majorées donc la partie $A \cup B$ est majorée par le maximum des majorants par exemple :
$$\forall x \in A \cup B, \quad x \leq \sup(A), x \leq \sup(B).$$
Donc
$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B)).$$
Puis $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ d'où
$$\sup(A) \leq \sup(A \cup B), \quad \sup(B) \leq \sup(A \cup B).$$
Par conséquent
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)).$$

2. Comme A et B sont non vides, la partie $A + B$ est également non vide. De plus les parties A et B sont majorées donc la partie $A + B$ est majorées par la somme des majorants par exemple :
$$\forall a \in A, b \in B, \quad a + b \leq \sup(A) + \sup(B).$$
Ainsi nous avons déjà la première inégalité
$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$
Puis, par caractérisation séquentielle des bornes supérieures, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ tels que
$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sup(A), \quad b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sup(B).$$

Donc $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A+B)^{\mathbb{N}}$ et

$$a_n + b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup(A)+\sup(B).$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n \leq \sup(A+B)$$

donne en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A+B).$$

Par conséquent

$$\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B).$$

3. Non nous n'avons pas la même propriété car nous avons des problèmes de signe. Si par exemple $A=B=\mathbb{R}_-$ alors A et B sont deux parties non vides majorées (par 0) mais $A\times B=\mathbb{R}_+$ est non majorée.

Exercice.

1. On considère $E=\{0,1\}\times\mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique $\leq_L$: pour tous $(k,n),(\ell,m) \in E, (k,n) \leq_L (\ell,m)$ si $k<\ell$ ou ($k=\ell$ et $n\leq m$). On considère également la partie $A=\{(0,n), n\in\mathbb{N}\}$ de l'ensemble E. Montrer que la partie A admet une borne supérieure mais pas de plus grand élément.

2. On considère maintenant $E=\{0,1\}\times\mathbb{Z}$ muni encore de l'ordre lexicographique $\leq_L$. On considère également la partie $B=\{(0,n), n\in\mathbb{Z}\}$ de l'ensemble E. Montrer que la partie B est majorée mais n'admet pas de borne supérieure.

Réponse.

1.
   - Nous avons
   $$\forall n,m \in \mathbb{N}, \quad (0,n) \leq_L (1,m).$$
   Donc, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $(1,m)$ est un majorant de l'ensemble A. Réciproquement soit (k,m) un majorant de l'ensemble A. Si $k\neq 1$ alors $k=0$ et $(k,m)=(0,m)\leq_L (0,m+1)\in A$ ce qui est absurde. Donc $k=1$ et $(k,m)=(1,m)$. Par conséquent l'ensemble des majorants de la partie A est $\{(1,m), m\in\mathbb{N}\}$. Ainsi la borne supérieure de la partie A est le plus petit majorant de cet ensemble $(1,0)$.
   - On suppose par l'absurde que la partie A admette un plus grand élément $(0,n)$ avec $n\in\mathbb{N}$. Alors $(0,n)\leq_L (0,n+1)\in A$ ce qui est absurde. Donc la partie A n'admet pas de plus grand élément.

2.
   - Comme précédemment la partie B est majorée par tous les $(1,m), m\in\mathbb{Z}$.
   - L'ensemble $\{(1,m), m\in\mathbb{Z}\}$ n'admet pas de plus petit élément. Donc la partie B n'admet pas de borne supérieure.

Question de cours. Montrer que l'application $A \longmapsto \sup(A)$ est croissante de l'ensemble des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$ ordonné par l'inclusion dans $\mathbb{R}$ ordonné par $\leq$.

Question de cours. Décrire la géométrie des solutions en fonctions du paramètre réel m puis donner l'ensemble des solutions quand ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right.$$

Question de cours. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $(iz - i)\overline{z - i} \in \mathbb{R}$. Décrire géométriquement les points correspondants.

Exercice.

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n(1-x).$$

Déterminer les réels suivants

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x), \quad \sup_{x\in[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}.$$

Déterminer les réels suivants

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x), \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

3. Que peut-on en conclure ? A-t-on toujours une inégalité vérifiée ?

Réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ de fonction dérivée

$$f_n' : x \in [0,1] \longmapsto nx^{n-1}(1-x) - x^n = nx^{n-1} - nx^n - x^n = x^{n-1}(n - nx - x) = x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

Ainsi on obtient que la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1}, \right]$. Donc

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis

$$\sup_{x\in[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} 0 = 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons par minimisation du dénominateur

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc Et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} 0 = 0.$$

3. Nous pouvons conclure que nous n'avons pas égalité en général. Par contre si nous avons une suite de fonctions majorées $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in I$ ainsi que la suite $(\sup_{x\in I} f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ alors

$$\sup_{x\in I} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} f_n(x).$$

En effet, pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$f_n(x) \leq \sup_{x' \in I} f_n(x').$$

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \leq \lim_{n \to +\infty} \sup_{x' \in I} f_n(x').$$

Donc la fonction $\lim_{n \to +\infty} f_n$ est majorée et vérifie l'inégalité souhaitée.

Exercice. On considère un ensemble E muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive. On considère également la relation $\mathcal{S}$ sur E définie par, pour tout $x, y \in E, x\mathcal{S}y$ si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

1. Montrer que la relation $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.
2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définit bien une relation d'ordre sur $E/\mathcal{S}$ les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\mathcal{S}$.

Réponse.

1. Vérifions les axiomes d'une relation d'équivalence :
   - Réflexive : Soit $x \in E$. Alors, comme $\mathcal{R}$ est réflexive, $x\mathcal{R}x$. Donc $x\mathcal{S}x$.
   - Transitive : Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{S}y, y\mathcal{S}z$. Alors $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x, y\mathcal{R}z, z\mathcal{R}y$. Donc, comme la relation $\mathcal{R}$ est transitive, $x\mathcal{R}$ et $z\mathcal{R}x$. Ainsi $x\mathcal{S}z$.
   - Symétrique : Soient $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{S}y$. Alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Donc $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$. Ainsi $y\mathcal{S}x$.
2. Pour tous $\dot{x}, \dot{y} \in E/\mathcal{S}$, on dit que $\dot{x}\mathcal{R}\dot{y}$ si $x\mathcal{R}y$. Vérifions tout d'abord que la relation $\mathcal{R}$ est bien définie sur $E/\mathcal{S}$ i.e. qu'elle ne dépend pas du représentant choisi : soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ tels que $\dot{x}_1 = \dot{x}_2, \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ et $\dot{x}_1\mathcal{R}\dot{y}_1$. Alors

   $$x_1\mathcal{R}x_2, \quad x_2\mathcal{R}x_1, \quad y_1\mathcal{R}y_2, \quad y_2\mathcal{R}y_1, \quad x_1\mathcal{R}y_1.$$

   Donc, par transitivité, $x_2\mathcal{R}y_2$. Ainsi $\dot{x}_2\mathcal{R}\dot{y}_2$. Vérifions maintenant les axiomes d'une relation d'ordre sur $E/\mathcal{S}$:
   - Réflexive : Soit $\dot{x} \in E/\mathcal{S}$. Alors $x\mathcal{R}x$ et donc $\dot{x}\mathcal{R}\dot{x}$.
   - Transitive : Soient $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in E/\mathcal{S}$ tels que $\dot{x}\mathcal{R}\dot{y}$ et $\dot{y}\mathcal{R}\dot{z}$. Alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Ainsi par transitivité $x\mathcal{R}z$. Donc $\dot{x}\mathcal{R}\dot{z}$.
   - Antisymétrie : Soient $\dot{x}, \dot{y} \in E/\mathcal{S}$ tels que $\dot{x}\mathcal{R}\dot{y}$ et $\dot{y}\mathcal{R}\dot{x}$. Alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Donc $x\mathcal{S}y$. Ainsi $\dot{x} = \dot{y}$.