

# Comportement limite de la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde à valeur terminale singulière

Dorian Cacitti-Holland

Laboratoire Manceau de Mathématiques - Université du Mans

Vendredi 14 juin 2024

# Problème de liquidation

Un agent possède une certaine quantité d'un actif financier ce qui lui permet d'avoir une richesse  $A_t$  à l'instant  $t$ .

Il souhaite ne plus en avoir à un instant terminal fixé  $T \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$A_T = 0.$$

Sa volonté de vendre influence le marché. Il doit vendre au fur et à mesure de l'évolution du cours de l'actif afin de minimiser ses pertes (ou maximiser ses gains).

# Problème de liquidation

Ainsi il doit terminer le processus  $(a_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  minimisant la fonctionnelle

$$J(a) = \mathbb{E} \left( \int_0^T (b_s |a_s|^p + c_s |A_s|^p) ds + \xi |A_T|^p \mid \mathcal{F}_T \right)$$

parmi les processus  $a$  tels que  $a \in L^1(0, +\infty)$  et  $A_t = A_0 + \int_0^t a_s ds$ , où nous avons les paramètres suivants ;

- 1  $A_0$  quantité initiale,
- 2  $b, c, p > 1$  reflétant l'influence de l'agent sur le marché,
- 3  $\xi$  une variable aléatoire singulière  $\mathbb{P}(\xi = +\infty) > 0$  permettant une marge de manœuvre si la liquidation n'est pas optimale.  
On impose seulement  $A_T = 0$  lorsque  $\xi = +\infty$  :

$$A_T \mathbf{1}_{\{\xi = +\infty\}} = 0.$$

## Théorème de minimisation de la fonctionnelle $J$

Nous avons, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$A_t^* = A_0 \exp \left( - \int_t^T \left( \frac{Y_s}{b_s} \right)^{q-1} ds \right),$$

avec :

- 1  $Y$  "solution" de l'équation

$$Y_t = \xi - \int_t^T (p-1) \frac{|Y_s|^{q-1} Y_s}{b_s^{q-1}} ds + \int_t^T c_s ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

- 2  $Z$  processus couplé à  $Y$ ,
- 3  $W$  mouvement brownien,
- 4  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

## Définition d'une EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- 1  $(Y, Z)$  l'inconnue,
- 2  $\xi$  la valeur terminale singulière,  $f$  le générateur.

## Dans un cadre markovien

- 1  $\xi = g(X_T)$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ,
- 2  $X$  solution d'une EDS

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

- 3  $f(s, y, z) = f(s, x, y, z)$  déterministe.

# Existence et d'unicité d'une "solution continue"

## Théorème

Sous de multiples hypothèses sur les paramètres  $f, g, b, \sigma$ , nous avons existence et unicité d'une sur-solution minimale  $(Y, Z)$  telle que

$$\liminf_{t \rightarrow T} Y_t = g(X_T) = \xi.$$

## Sur-solution

- 1  $Y_s = Y_t + \int_s^t f(u, X_u, Y_u, Z_u) du - \int_s^t Z_u dW_u, 0 \leq s \leq t < T,$
- 2  $\liminf_{t \rightarrow T} Y_t \geq g(X_T) = \xi.$

## Dans le problème de liquidation

Si  $\liminf_{t \rightarrow T} Y_T > \xi$  alors il y aurait un coût supplémentaire.

# Existence et d'unicité d'une "solution continue"

Pour démontrer ce résultat on utilise la dérivation de Malliavin : on dérive des variables aléatoires pour obtenir des théorèmes intéressants.

On obtient que le processus  $Z$  est la dérivée du processus  $Y$  :

$$Z_t = D_t Y_t.$$

On utilise l'intégration par parties pour contrôler le terme en  $Z_t$  par le terme en  $Y_t$  :

$$\mathbb{E} \left( G \int_0^t D_s F \times h_s ds \right) = \mathbb{E}(FGW_t) - \mathbb{E} \left( F \int_0^t D_s G \times h_s ds \right).$$

## Et si l'on rajoute des sauts ?

On suppose que le processus  $A$  peut avoir des sauts aléatoires au cours du temps modélisés par un processus de Poisson  $N$  d'intensité  $\lambda$ .

Le problème de liquidation va être modifié en conséquent et le processus  $Y$  donnant le minimiseur vérifie la nouvelle EDSR

EDSR dirigée avec un processus de Poisson

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s dN_s.$$

A-t-on encore la continuité de la solution sous des hypothèses similaires ?



## Discontinuité de la solution

Si le générateur  $f$  est quadratique :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Y_s |Y_s| ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s dN_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

et la valeur terminale est une barrière à droite :

$$\xi = g(X_T) = (+\infty)1_{\{X_T \geq x_0\}} + \varphi(X_T)1_{\{X_T < x_0\}}.$$

Alors la solution de l'EDSR est donnée par

$$Y_t = \frac{1}{T-t} 1_{\{t < T\}} + g(X_T) 1_{\{t = T\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

En particulier

$$\lim_{t \rightarrow T} Y_t = +\infty > g(X_T).$$

# Démonstration du contre-exemple

## Equation aux dérivées partielles associées

Si une fonction  $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est solution de l'EDP sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \lambda u(t, x) - u(t, x)|u(t, x)| = -\lambda u(t, x + 1) \\ u(T, x) = g(x). \end{cases}$$

Alors

$$Y_t = u(t, X_t).$$

# Démonstration du contre-exemple

Pour résoudre cette EDP on procède avec les EDP tronquées

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n}{\partial t}(t, x) - \lambda u^n(t, x) - u^n(t, x)|u^n(t, x)| = -\lambda u^n(t, x + 1) \\ u^n(T, x) = g(x) \wedge n \end{cases}$$

dont on détermine les solutions en procédant étape par étape par rapport  $x$ .

Pour  $x \geq x_0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n}{\partial t}(t, x) - \lambda u^n(t, x) - u^n(t, x)|u^n(t, x)| = -\lambda u^n(t, x + 1) \\ u^n(T, x) = n \end{cases}$$

de solutions

$$u^n(t, x) = \frac{1}{T - t + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T - t} = u(t, x), \quad t < T.$$

# Démonstration du contre-exemple

Puis pour  $x_0 - 1 \leq x < x_0$  l'équation devient pour  $n$  suffisamment grand :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n}{\partial t}(t, x) - \lambda u^n(t, x) - u^n(t, x)|u^n(t, x)| = -\frac{\lambda}{T - t + \frac{1}{n}} \\ u^n(T, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

où l'on reconnaît une équation de Riccati que l'on peut résoudre en

$$u^n(t, x) = \frac{1}{T - t + \frac{1}{n}} + \psi^n(t, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T - t} = u(t, x), \quad t < T.$$

On réitère l'opération pour avoir le résultat pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

# Simulations du contre-exemple

Pour comprendre le comportement de la solution  $u^n(\cdot, x)$  pour  $x \in [x_0 - 1, x_0[$ , on peut étudier le schéma numérique d'Euler implicite rétrograde pour l'EDO

$$\begin{cases} u'(t) - \lambda u(t) - u(t)|u(t)| &= -\lambda \frac{1}{T-t} \\ u(T) &= \chi \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad h_N = \frac{T}{N}.$$

$$u_N(t_N) = \chi$$

et

$$u_N(t_{k+1}) = u_N(t_k) - h_N f(t_k, u_N(t_k))$$

avec

$$f(t, u) = \lambda + u^2 - \lambda \frac{1}{T-t}.$$

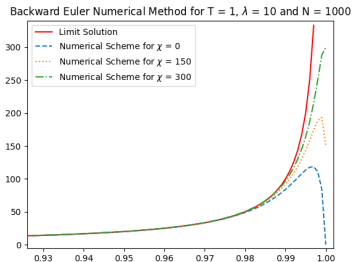
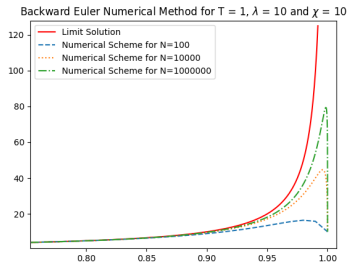
## Convergence du schéma numérique

Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,

$$\max_{0 \leq k \leq \lfloor \alpha N \rfloor} \left| u_N(t_k) - \frac{1}{T - t_k} \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Le schéma d'Euler implicite rétrograde peut être explicité car il s'agit seulement d'une équation polynomiale du second degré. Puis on montre qu'à l'instant initial  $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N(t_0) = \frac{1}{T}$  et on conclue en utilisant les résultats de convergence sur les schémas d'Euler classiques.

# Simulations du contre-exemple



**Figure:** Méthode numérique d'Euler rétrograde pour  $T = 1$  et  $\lambda = 10$ . Sur la gauche  $\chi = 10$ ; sur la droite  $N = 1000$ .

Merci pour votre attention.