Simplicité du groupe alterné A_n

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Théorie des groupes de Félix Ulmer

Leçons.

1. 103 Conjugaison dans un groupe, exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients, applications
2. 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini, applications
3. 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe, applications

Lemme. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$ et N sous-groupe distingué de A_n tel que N contienne un 3-cycle de A_n, alors

$$N = A_n$$

Démonstration. Notons (a, b, c) un 3-cycle de N.
Or tous les 3-cycles sont dans la même classe de conjugaison dans S_n.
Donc, pour tout 3-cycles (a', b', c'), il existe $\sigma \in S_n$ tel que

$$\underbrace{\sigma \circ (a, b, c) \circ \sigma^{-1}}_{=(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c))} = (a', b', c')$$

Si $\varepsilon(\sigma) = 1$ alors $\sigma \in A_n$ et $(a', b', c') \in N$ car N distingué dans A_n.
Sinon $\varepsilon(\sigma) = -1$.
Or $n \geq 5$, donc il existe $(d, e) \in [\![1, n]\!]$ distincts de $\{a', b', c'\}$. On considère donc

$$\sigma' = (d, e)\sigma \in A_n$$

Ainsi

$$\sigma' \circ (a, b, c) \circ \sigma'^{-1} = (d, e) \circ (a', b', c') \circ (d, e) = (a', b', c')$$

Donc N contient tous les 3-cycles.
Or les 3-cycles engendrent A_n, d'où

$$N = A_n$$

□

Théorême. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$, alors le groupe alterné A_n est simple.

Démonstration. Soit N sous-groupe distingué de A_n.
Montrons que N est un sous-groupe trivial de A_n.
On suppose $N \neq A_n$.
Alors d'après le lemme précédent, N ne contient pas de 3-cycle.
Soit $\sigma \in N$ et distinguons tous les cas possibles :

— Si $\sigma = (ijkl...)...$, alors, comme $(ijk) \in A_n$ et $N \triangleleft A_n$,

$$\sigma' = (jkil...)... = (ijk)\sigma(ijk)^{-1} \in N$$

Ainsi

$$(ijl) = \sigma'\sigma^{-1} \in N$$

Ce qui est absurde.

— Si $\sigma = (ijk)...$ avec un seul 3-cycle alors, d'après ce qui précède les autres cycles apparaissant dans la décomposition de σ sont des transposition.
D'où

$$(ikj) = \sigma^2 \in N$$

Ce qui est absurde.

— Si $\sigma = (ijk)(lmn)...$ alors

$$\sigma' = (lmk)\sigma(lmk)^{-1} \in N$$

Et

$$(ilkjn)... = \sigma'\sigma \in N$$

Ce qui est en contradiction avec le premier tiret.

— Si $\sigma = (ij)(kl)$ alors, comme $n \geq 5$ il existe $m \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j, k, l\}$, d'où

$$\sigma' = (imj)\sigma(imj)^{-1} \in N$$

Et

$$(ijm) = \sigma'\sigma \in N$$

Ce qui est absurde.

— Si $\sigma = (ij)(kl)(mn)...$ avec uniquement des transpositions alors

$$\sigma' = (ml)(kj)\sigma(jk)(lm) \in N$$

Et

$$(iml)(knj) = \sigma'\sigma \in N$$

Ce qui contredit un tiret précédent.

Par conséquent il ne reste plus que

$$\sigma = id$$

D'où

$$N = \{id\}$$

Ce qui montre que A_n est simple. $\square$

Remarque. $A_1 = \{id_{\{1\}}\}$, $A_2 = \{id_{[\![1,2]\!]}\}$ et $A_3 = \{id_{[\![1,3]\!]}, (123), (132)\}$ sont simples car ils n'admettent pas de sous-groupes propres.
A_4 n'est pas distingué car admet comme sous-groupe distingué propre

$$V_4 = \{id_{[\![1,4]\!]}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Car

$$\forall \sigma \in A_n, \sigma(ij)(kl)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j))(\sigma(k)\sigma(l)) \in V$$

Et

$$\{id_{[\![1,4]\!]}\} \neq V_4 \neq A_4$$