

# Correction TD 10 L1 Bio

Roulley Emeric

## Exercice 1 :

1. On cherche  $a$  et  $b$  deux réels tels que

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \quad (\star)$$

### Méthode 1 : Mise au même dénominateur

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1+x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \\ &= \frac{a(1+x) + b(1-x)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(a-b)x + (a+b)}{(1-x)(1+x)} \end{aligned}$$

Par unicité d'écriture d'une fraction rationnelle, on doit avoir :

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$$

D'où

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}$$

### Méthode 2 : Multiplication évaluation

\* En multipliant  $(\star)$  par  $1-x$  et en évaluant en  $x=1$ , on trouve :  $a=\frac{1}{2}$ .

\* En multipliant  $(\star)$  par  $1+x$  et en évaluant en  $x=-1$ , on trouve :  $b=\frac{1}{2}$ .

D'où

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}$$

2. On en déduit une primitive sur  $] -1, 1[$  :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \int \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{-1}{1-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{-1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) + Cte \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + Cte \\ &= \ln \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) + Cte \end{aligned}$$

3. Par le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx = \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln(\sqrt{3}).$$

## Exercice 2 :

1. • On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$(1') f'(x) + f(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = 1$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = x$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\boxed{\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\}}$$

- On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$(1') f'(x) - f(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = -1$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = -x$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^x, C \in \mathbb{R}\}$$

- 2. • On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$(1') f'(x) + 3f(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = 3$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = 3x$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^{-3x}, C \in \mathbb{R}\}$$

- On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$(1') f'(x) + xf(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = x$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = \frac{x^2}{2}$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}\}$$

- 3. • On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$(1') f'(x) - \frac{2x}{1+x^2}f(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = -\ln(1+x^2)$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^{\ln(1+x^2)}, C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto C(1+x^2), C \in \mathbb{R}\}$$

- On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$(1') f'(x) - \sin(x)f(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = -\sin(x)$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = \cos(x)$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^{-\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

### Exercice 3 :

- On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1) f'(x) - f(x) = x + 2$$

1. On cherche une solution particulière  $f_0$  de (1) de la forme  $f_0(x) = \alpha x + \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f_0 \text{ est solution de (1)} &\Leftrightarrow f_0'(x) - f_0(x) = x + 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha - (\alpha x + \beta) = x + 2 \\ &\Leftrightarrow -\alpha x + (\alpha - \beta) = x + 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow f_0(x) = -x - 3 \end{aligned}$$

2. On introduit l'équation différentielle linéaire homogène associée à (1) :

$$(1') f'(x) - f(x) = 0$$

L'équation (1') est de la forme  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  avec  $a(x) = -1$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = -x$ . Donc d'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (1') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^x, C \in \mathbb{R}\}$$

D'après le cours, on en déduit que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x - x - 3, C \in \mathbb{R}\}}$$

3. Soit  $f \in \mathcal{S}$  une solution de (1). D'après la question précédente, il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = Ce^x - x - 3$ . Alors :

$$\begin{aligned} f(0) = -4 &\Leftrightarrow Ce^0 - 0 - 3 = -4 \\ &\Leftrightarrow C - 3 = -4 \\ &\Leftrightarrow C = -1 \\ &\Leftrightarrow f(x) = -e^x - x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Leftrightarrow Ce^0 - 0 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow C - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow C = 3 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 3e^x - x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) = -3 &\Leftrightarrow Ce^0 - 0 - 3 = -3 \\ &\Leftrightarrow C - 3 = -3 \\ &\Leftrightarrow C = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = -x - 3 \\ &\Leftrightarrow f = f_0 \end{aligned}$$